

---

# Intervall-Analyse analoger Schaltungen mit Bauteiletoleranzen



**Fraunhofer** Institut  
Techno- und  
Wirtschaftsmathematik

---

Kaiserslautern, 22. September 2005

Disputation

Dipl.-Math. Alexander Dreyer

---

# Intervall-Analyse analoger Schaltungen mit Bauteiletoleranzen

---

Vortrag zur Doktorarbeit

Dipl.-Math. Alexander Dreyer

Fraunhofer-Institut für  
Techno- und  
Wirtschaftsmathematik

Disputation  
Kaiserslautern, 22. September 2005

---



**Fraunhofer** Institut  
Techno- und  
Wirtschaftsmathematik

# Übersicht

1. Grundlagen
2. Symbolische Vorbetrachtungen
3. Intervall-Analyse analoger Schaltungen
4. Anwendungsbeispiele
5. Zusammenfassung



# Übersicht

## 1. Grundlagen

- Toleranzbehaftete analoge Schaltungen
- Grundlagen der Intervall-Arithmetik
- Intervall-Verfahren

2. Symbolische Vorbetrachtungen

3. Intervall-Analyse analoger Schaltungen

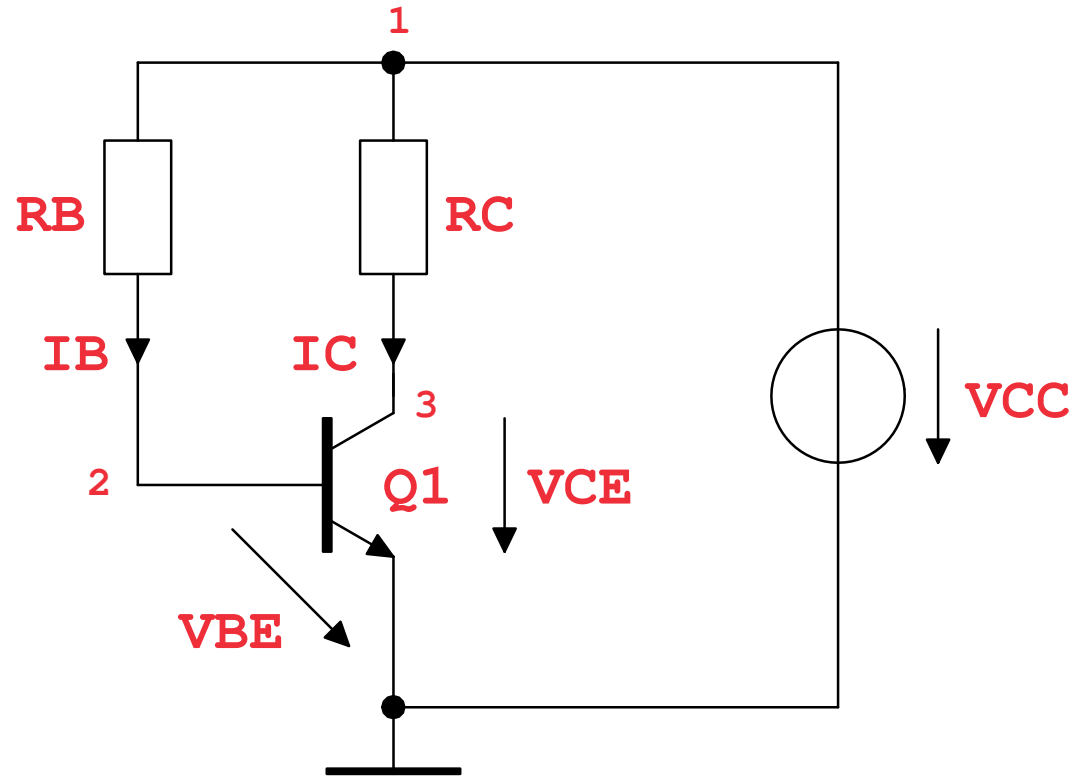
4. Anwendungsbeispiele

5. Zusammenfassung



# Toleranzbehaftete analoge Schaltungen

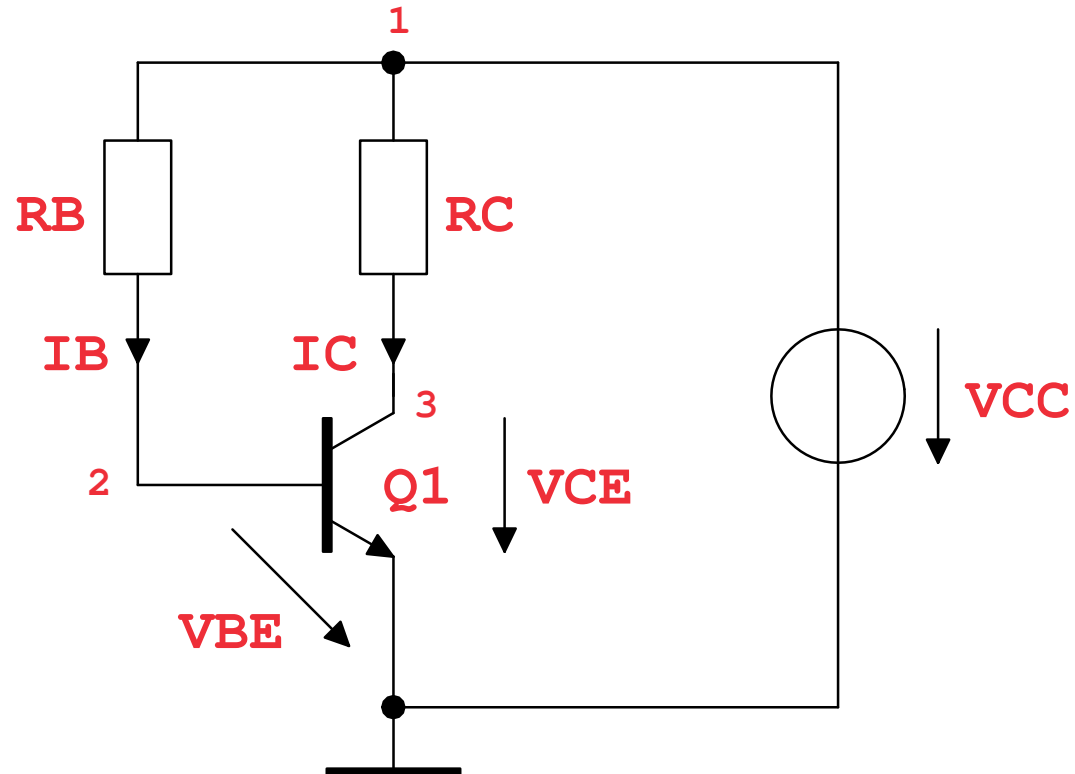
Bipolar-Transistor-Schaltung



## Toleranzbehaftete analoge Schaltungen

Bipolar-Transistor-Schaltung

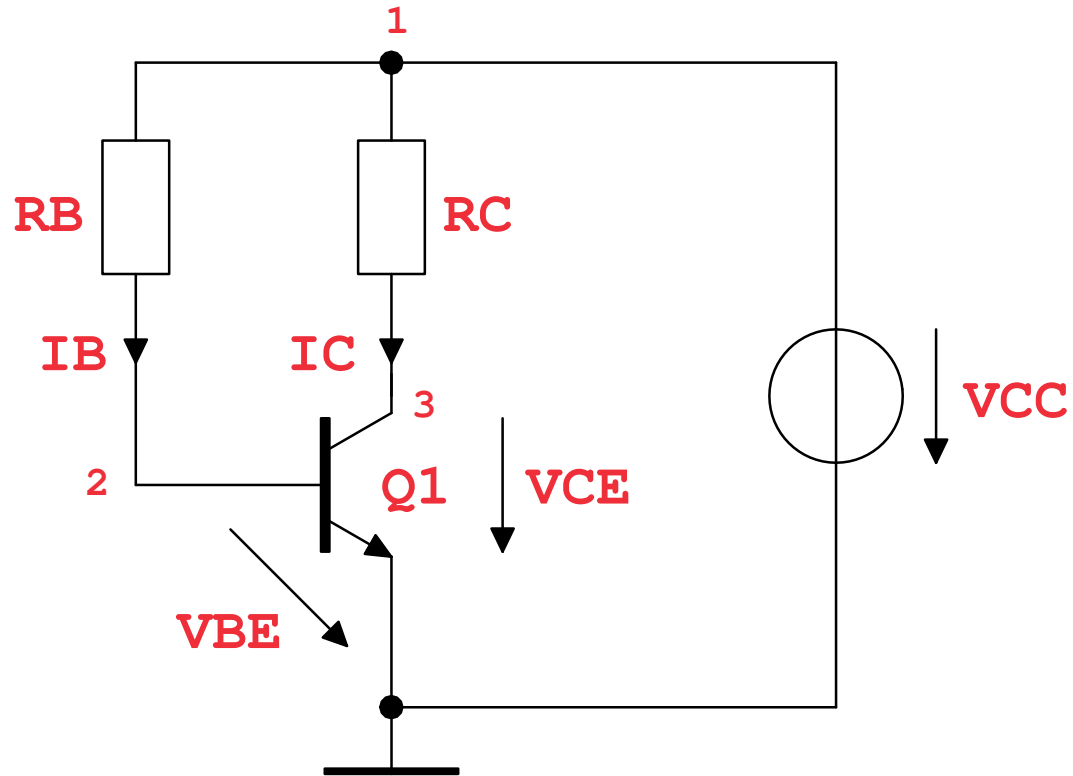
$$\begin{aligned} V_{CC} &= 12\text{ V} \\ R_C &= 4.2\text{ k}\Omega \\ R_B &= 400\text{ k}\Omega \end{aligned}$$



## Toleranzbehaftete analoge Schaltungen

Bipolar-Transistor-Schaltung

$$\begin{aligned} V_{CC} &= 12\text{ V} \\ R_C &= 4.2\text{ k}\Omega \\ R_B &= 400\text{ k}\Omega \end{aligned}$$



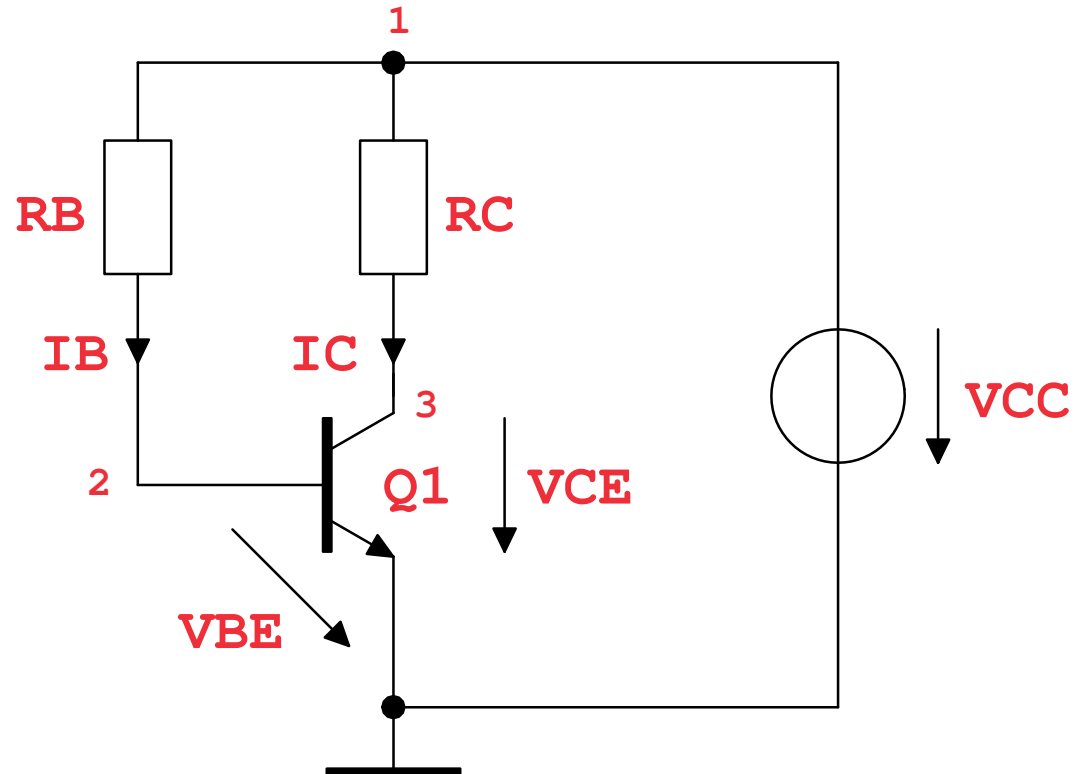
## Toleranzbehaftete analoge Schaltungen

Bipolar-Transistor-Schaltung

$$\begin{aligned} V_{CC} &= 12 \text{ V} \\ R_C &= 4.2 \text{ k}\Omega \\ R_B &= 400 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$



$$V_3 \approx 3.03 \text{ V}$$





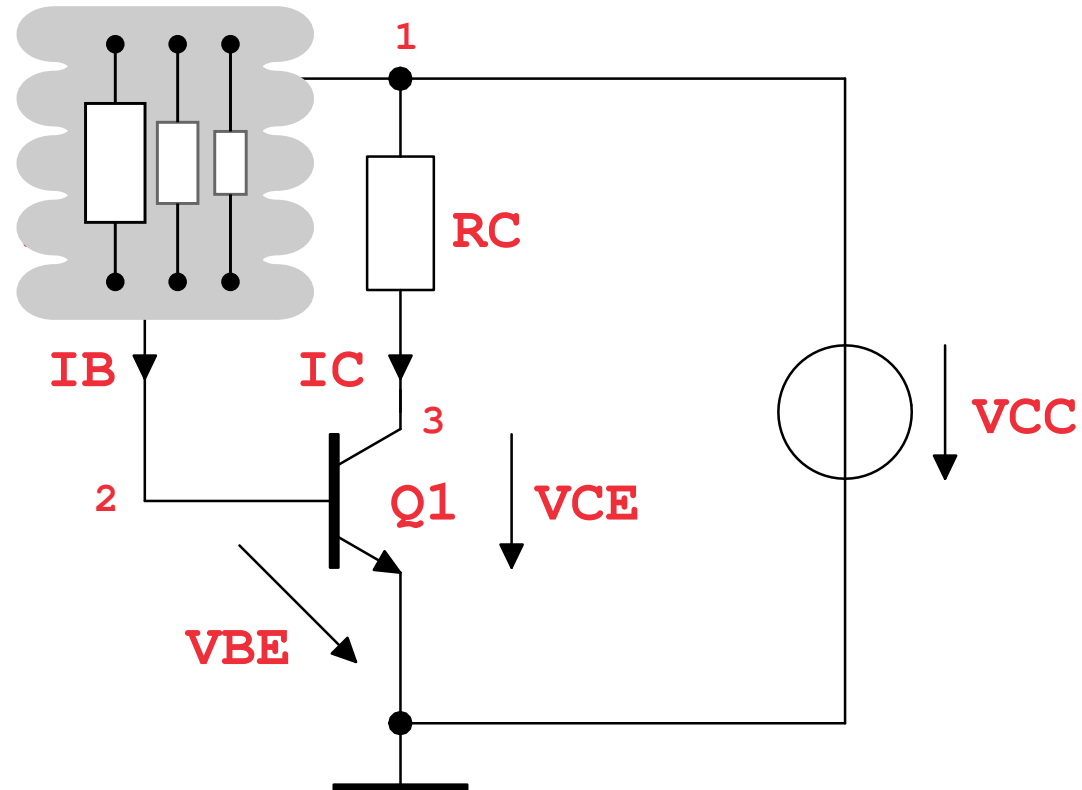
## Toleranzbehaftete analoge Schaltungen

Bipolar-Transistor-Schaltung  
mit Bauteiltoleranzen

$$\begin{aligned} V_{CC} &= 12 \text{ V} \\ R_C &= 4.2 \text{ k}\Omega \\ R_B &= 400 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$



$$V_3 \approx 3.03 \text{ V}$$



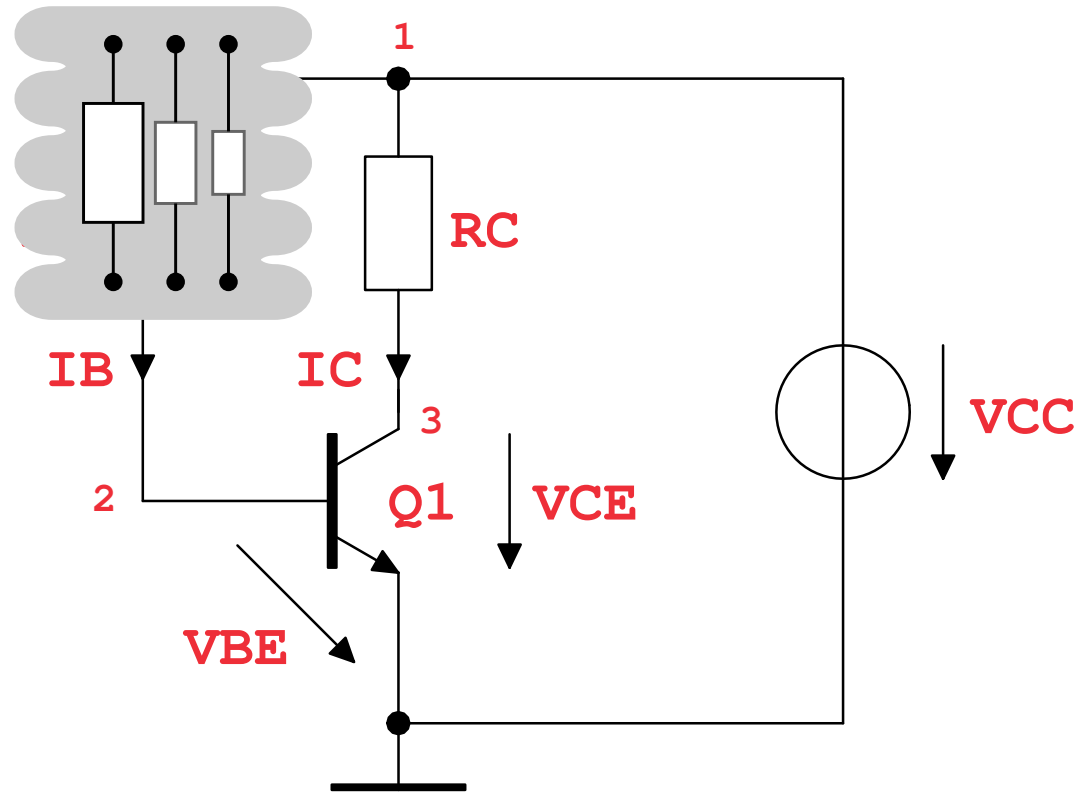
## Toleranzbehaftete analoge Schaltungen

Bipolar-Transistor-Schaltung  
mit Bauteiltoleranzen

$V_{CC} = 12\text{ V}$   
 $R_C = 4.2\text{ k}\Omega$   
 $R_B = 400\text{ k}\Omega \pm 5\%$

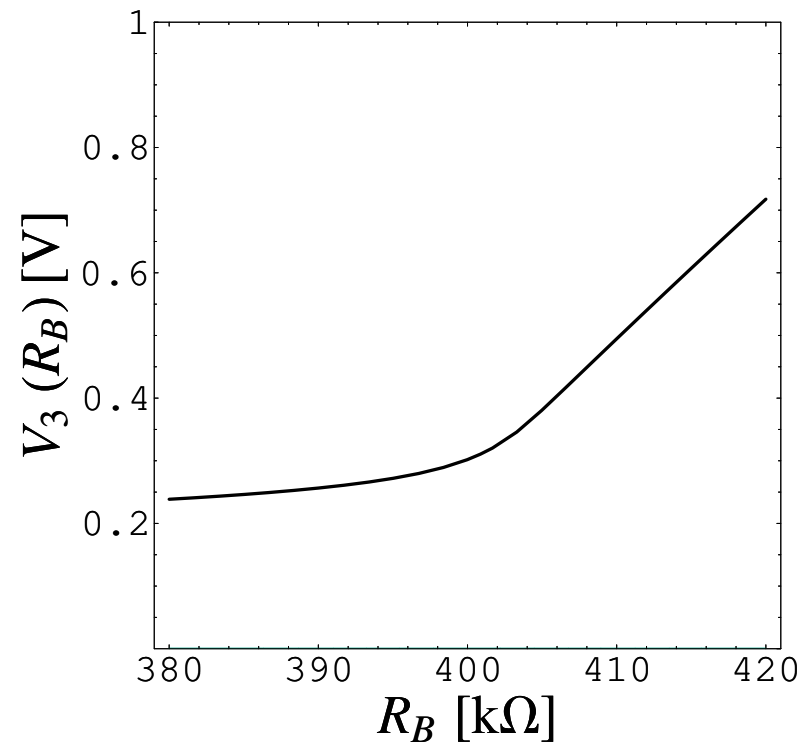


$$V_3 \approx 3.03\text{ V} \pm ?$$



## Toleranzbehaftete analoge Schaltungen

Bipolar-Transistor-Schaltung



$R_B = 400 \text{ k}\Omega \pm 5\%$

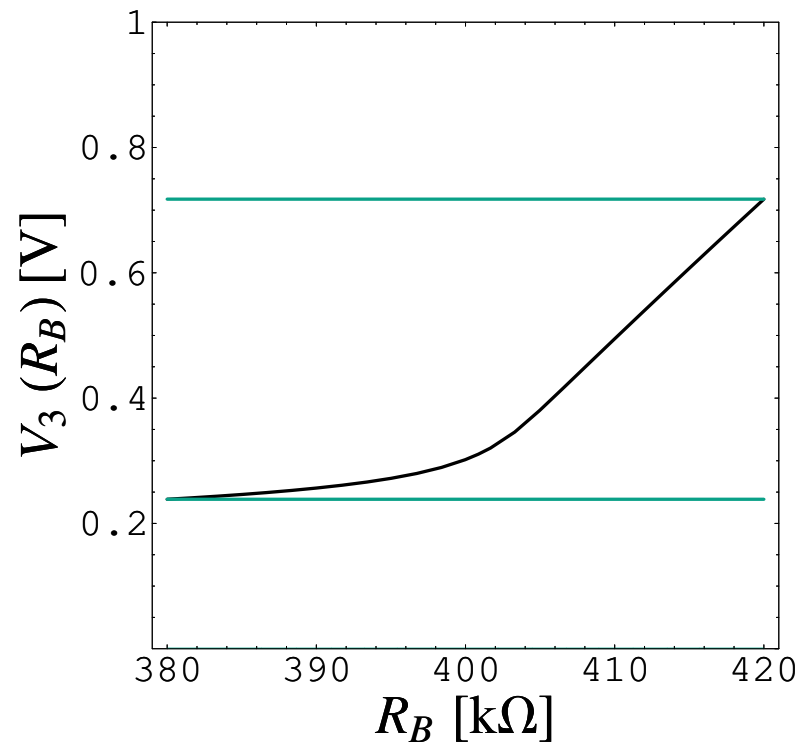
$R_B / 1 \text{ k}\Omega \in [380, 420]$



## Toleranzbehaftete analoge Schaltungen

Bipolar-Transistor-Schaltung

Wertebereich



$$R_B = 400 \text{ k}\Omega \pm 5\%$$

$$R_B / 1 \text{ k}\Omega \in [380, 420]$$



$$V_3 / 1 \text{ V} \in [0.237, 0.718]$$

$$V_3 \approx 0.4775 \text{ V} \pm 50\%$$

## Grundlagen der Intervall-Arithmetik

Intervall

$$[\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}, \quad \text{für } \underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Notation

$$[x] \equiv [\underline{x}, \bar{x}], \quad [-\infty, +\infty] \equiv \mathbb{R}$$



## Grundlagen der Intervall-Arithmetik

Intervall	$[\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}, \quad \text{für } \underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
Notation	$[x] \equiv [\underline{x}, \bar{x}], \quad [-\infty, +\infty] \equiv \mathbb{R}$
Intervalle über $\mathbb{R}$	$[\mathbb{R}] = \{[\underline{x}, \bar{x}] \mid [\underline{x}, \bar{x}] \text{ Intervall}\}$
Intervall-Vektor	$[\mathbf{x}] \in [\mathbb{R}]^n \quad \text{»Box«}$



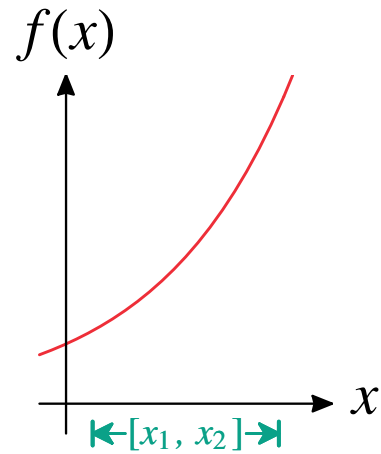
## Grundlagen der Intervall-Arithmetik

Intervall	$[\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\},$ für $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$	
Notation	$[x] \equiv [\underline{x}, \bar{x}],$ $[-\infty, +\infty] \equiv \mathbb{R}$	
Intervalle über $\mathbb{R}$	$[\mathbb{R}] = \{[\underline{x}, \bar{x}] \mid [\underline{x}, \bar{x}] \text{ Intervall}\}$	
Intervall-Vektor	$[\mathbf{x}] \in [\mathbb{R}]^n$ »Box«	
Philosophie	$[\mathbf{y}] \supseteq f([\mathbf{x}])$	Äußere Abschätzung
	$[\mathbf{x}] \supseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = 0\} \cap [\mathbf{x}_0]$	



# Grundlagen der Intervall-Arithmetik

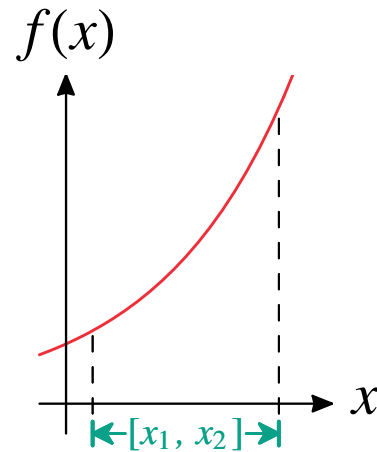
Monotone Funktionen





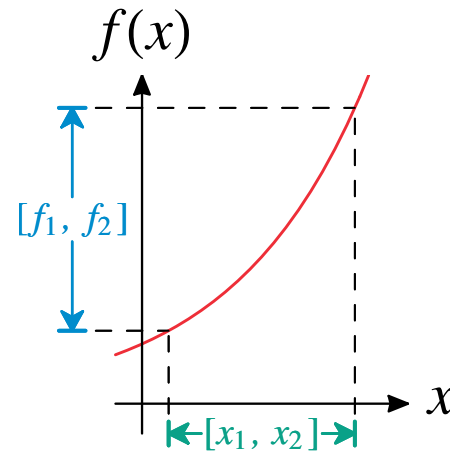
# Grundlagen der Intervall-Arithmetik

Monotone Funktionen



## Grundlagen der Intervall-Arithmetik

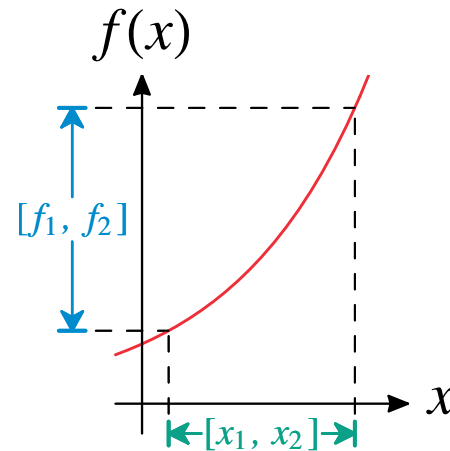
Monotone Funktionen



$$e^{[\underline{x}, \bar{x}]} := [e^{\underline{x}}, e^{\bar{x}}]$$

## Grundlagen der Intervall-Arithmetik

Monotone Funktionen



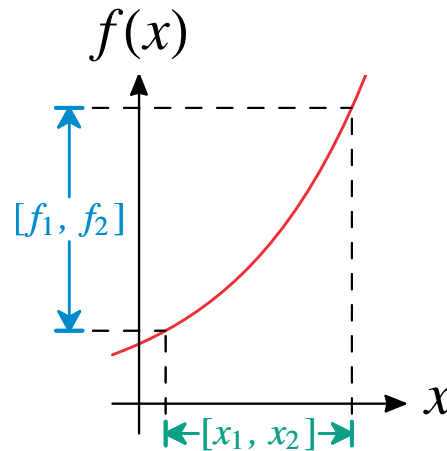
$$e[\underline{x}, \bar{x}] := [e^{\underline{x}}, e^{\bar{x}}]$$

$$\log([\underline{x}, \bar{x}]) := [\log(\underline{x}), \log(\bar{x})], \underline{x} > 0$$

$$[\underline{x}, \bar{x}]^n := [\underline{x}^n, \bar{x}^n], n = 1, 3, 5, \dots$$

## Grundlagen der Intervall-Arithmetik

Monotone Funktionen



$$e[\underline{x}, \bar{x}] := [e^{\underline{x}}, e^{\bar{x}}]$$

$$\log([\underline{x}, \bar{x}]) := [\log(\underline{x}), \log(\bar{x})], \underline{x} > 0$$

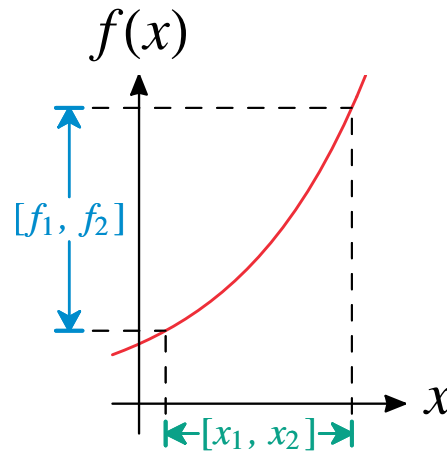
$$[\underline{x}, \bar{x}]^n := [\underline{x}^n, \bar{x}^n], n = 1, 3, 5, \dots$$

Abschnittsweise monotone Funktionen

$$[\underline{x}, \bar{x}]^n := [\min(\max(0, \underline{x})^n, \bar{x}^n), \max(\underline{x}^n, \bar{x}^n)] \text{ f\u00fcr } n = 2, 4, 6, \dots$$

## Grundlagen der Intervall-Arithmetik

Monotone Funktionen



$$e[\underline{x}, \bar{x}] := [e^{\underline{x}}, e^{\bar{x}}]$$

$$\log([\underline{x}, \bar{x}]) := [\log(\underline{x}), \log(\bar{x})], \underline{x} > 0$$

$$[\underline{x}, \bar{x}]^n := [\underline{x}^n, \bar{x}^n], n = 1, 3, 5, \dots$$

Abschnittsweise monotone Funktionen

$$[\underline{x}, \bar{x}]^n := [\min(\max(0, \underline{x})^n, \bar{x}^n), \max(\underline{x}^n, \bar{x}^n)] \text{ f\u00fcr } n = 2, 4, 6, \dots$$

analog: sin, cos, ...

## Grundlagen der Intervall-Arithmetik

Binäre Operationen

$$S = \{x \bullet y \mid x \in [x] \text{ und } y \in [y]\}$$

$$[x] \bullet [y] = [\inf S, \sup S]$$



## Grundlagen der Intervall-Arithmetik

Binäre Operationen

$$S = \{x \bullet y \mid x \in [x] \text{ und } y \in [y]\}$$

$$[x] \bullet [y] = [\inf S, \sup S]$$

Addition

$$[\underline{x}, \bar{x}] + [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$$

Subtraktion

$$[\underline{x}, \bar{x}] - [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]$$



## Grundlagen der Intervall-Arithmetik

Binäre Operationen

$$S = \{x \bullet y \mid x \in [x] \text{ und } y \in [y]\}$$

$$[x] \bullet [y] = [\inf S, \sup S]$$

Addition

$$[\underline{x}, \bar{x}] + [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$$

Subtraktion

$$[\underline{x}, \bar{x}] - [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]$$

Multiplikation

$$[\underline{x}, \bar{x}] \cdot [\underline{y}, \bar{y}] = [\min\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}, \max\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}]$$





## Grundlagen der Intervall-Arithmetik

Binäre Operationen

$$S = \{x \bullet y \mid x \in [x] \text{ und } y \in [y]\}$$

$$[x] \bullet [y] = [\inf S, \sup S]$$

Addition

$$[\underline{x}, \bar{x}] + [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$$

Subtraktion

$$[\underline{x}, \bar{x}] - [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]$$

Multiplikation

$$[\underline{x}, \bar{x}] \cdot [\underline{y}, \bar{y}] = [\min\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}, \max\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}]$$

Division

$$[\underline{x}, \bar{x}] / [\underline{y}, \bar{y}] = \begin{cases} [\underline{x}, \bar{x}] \cdot 1/[\underline{y}, \bar{y}], & \text{falls } 0 \notin (\underline{y}, \bar{y}) \\ [-\infty, +\infty] & \text{sonst} \end{cases}$$

$$1/[\underline{y}, \bar{y}] = [1/\bar{y}, 1/\underline{y}], \text{ falls } 0 \notin [\underline{y}, \bar{y}]$$

$$1/[0, \bar{y}] = [1/\bar{y}, +\infty], \quad 1/[\underline{y}, 0] = [-\infty, 1/\underline{y}]$$



## Grundlagen der Intervall-Arithmetik

Binäre Operationen

$$S = \{x \bullet y \mid x \in [x] \text{ und } y \in [y]\}$$

$$[x] \bullet [y] = [\inf S, \sup S]$$

Addition

$$[\underline{x}, \bar{x}] + [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$$

Subtraktion

$$[\underline{x}, \bar{x}] - [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]$$

Multiplikation

$$[\underline{x}, \bar{x}] \cdot [\underline{y}, \bar{y}] = [\min\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}, \max\{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}]$$

Division

$$[\underline{x}, \bar{x}] / [\underline{y}, \bar{y}] = \begin{cases} [\underline{x}, \bar{x}] \cdot 1/[\underline{y}, \bar{y}], & \text{falls } 0 \notin (\underline{y}, \bar{y}) \\ [-\infty, +\infty] & \text{sonst} \end{cases}$$

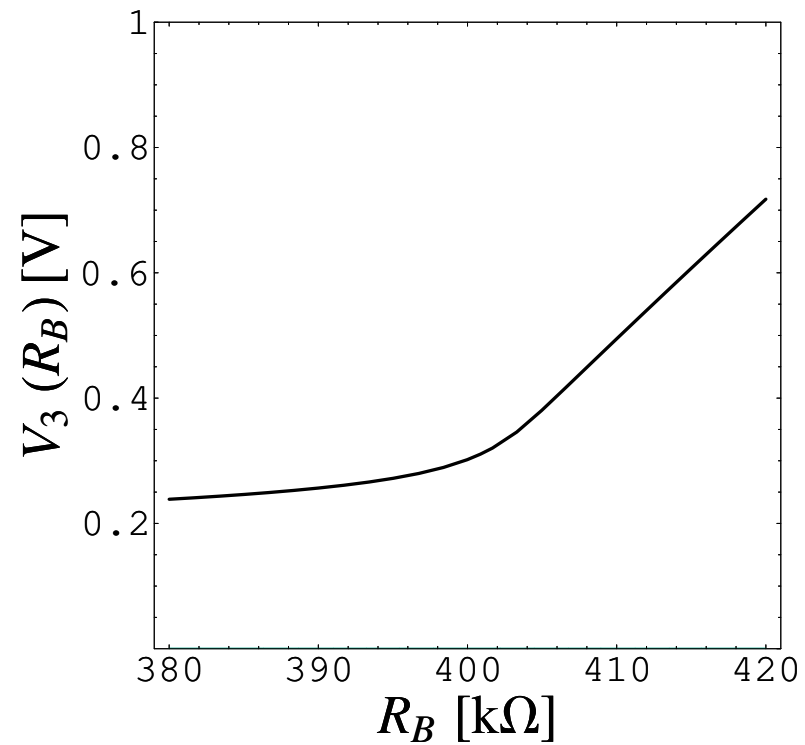
$$1/[\underline{y}, \bar{y}] = [1/\bar{y}, 1/\underline{y}], \text{ falls } 0 \notin [\underline{y}, \bar{y}]$$

$$1/[0, \bar{y}] = [1/\bar{y}, +\infty], \quad 1/[\underline{y}, 0] = [-\infty, 1/\underline{y}]$$



## Intervall-Verfahren

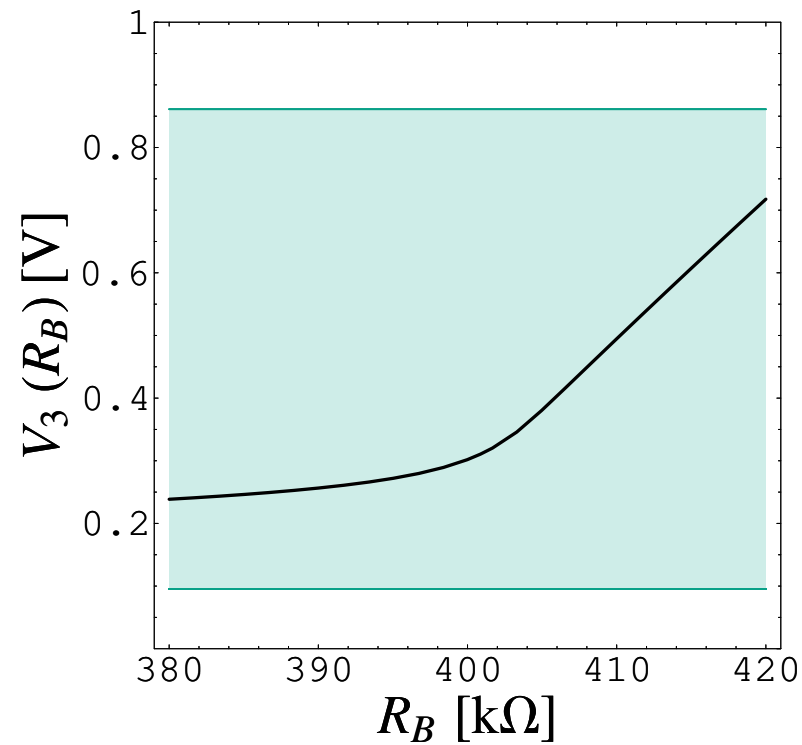
Bipolar-Transistor-Schaltung



## Intervall-Verfahren

Bipolar-Transistor-Schaltung

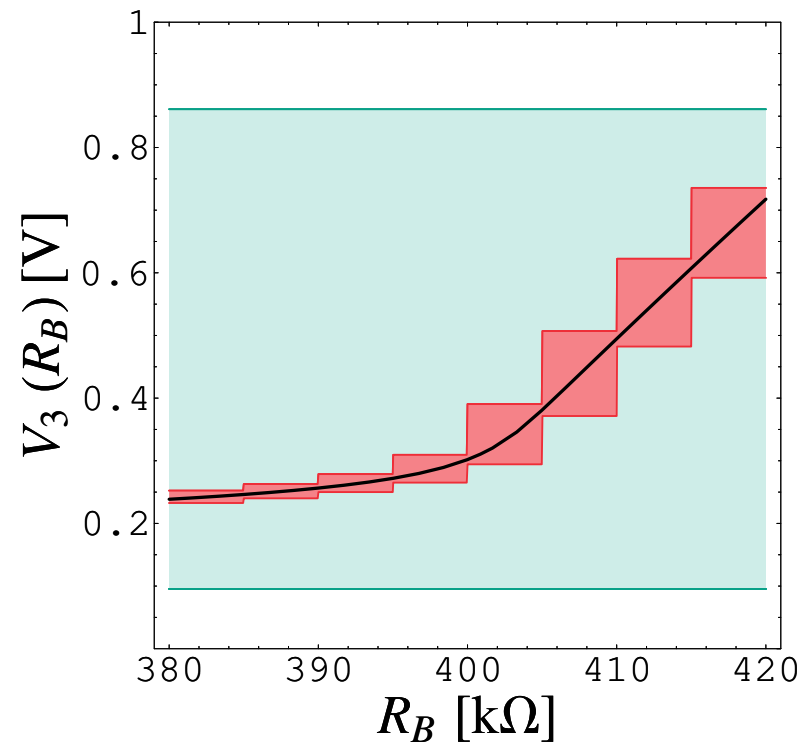
Äußere Abschätzung  
(Intervall-Methoden)



## Intervall-Verfahren

Bipolar-Transistor-Schaltung

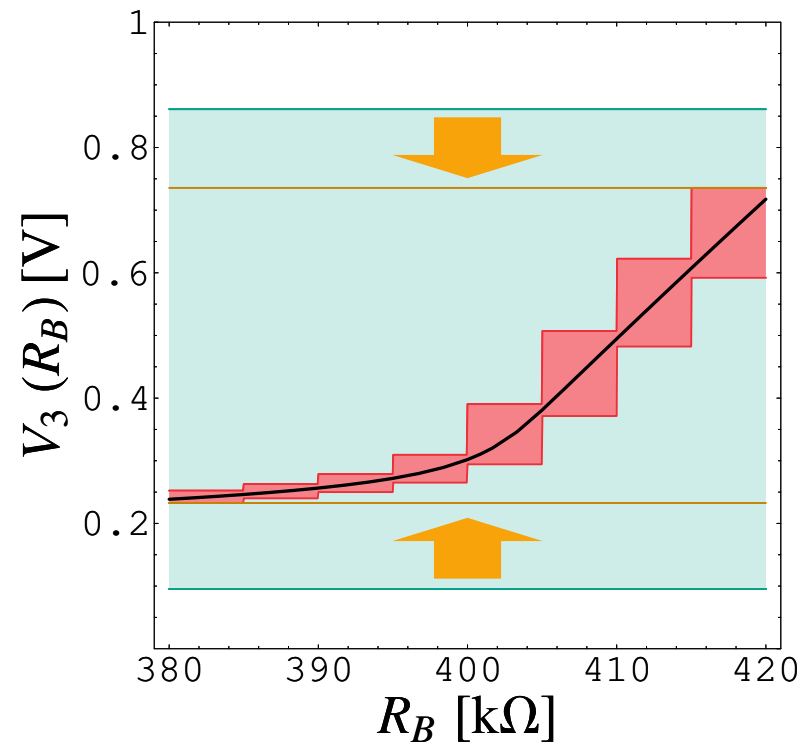
Feine Überdeckung



# Intervall-Verfahren

Bipolar-Transistor-Schaltung

Genauere Abschätzung



# Übersicht

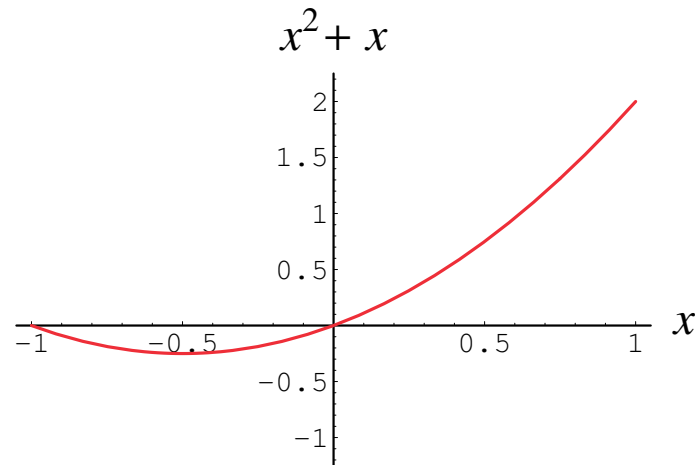
1. Grundlagen
- 2. Symbolische Vorbetrachtungen**
  - Das Abhängigkeitsproblem
  - Symbolische Vorverarbeitung
3. Intervall-Analyse analoger Schaltungen
4. Anwendungsbeispiele
5. Zusammenfassung



## Das Abhängigkeitsproblem

Beispiel

$$f(x) = x^2 + x$$



—  $f(x)$

$$f([-1, 1]) = [-\frac{1}{4}, 2]$$

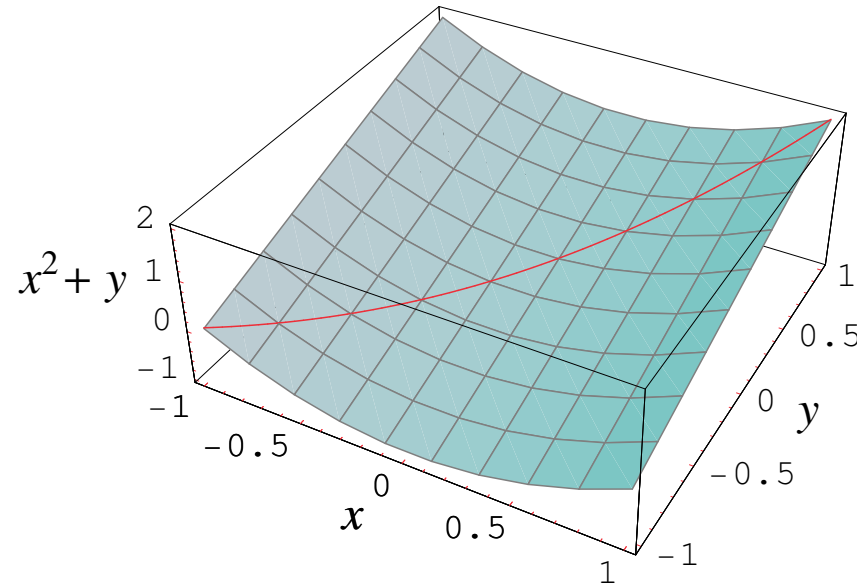
$$\text{aber: } [-1, 1]^2 + [-1, 1] = [-1, 2]$$



## Das Abhängigkeitsproblem

Geometrische Interpretation

$$g(x, y) = x^2 + y$$



$$- g(x, x)$$

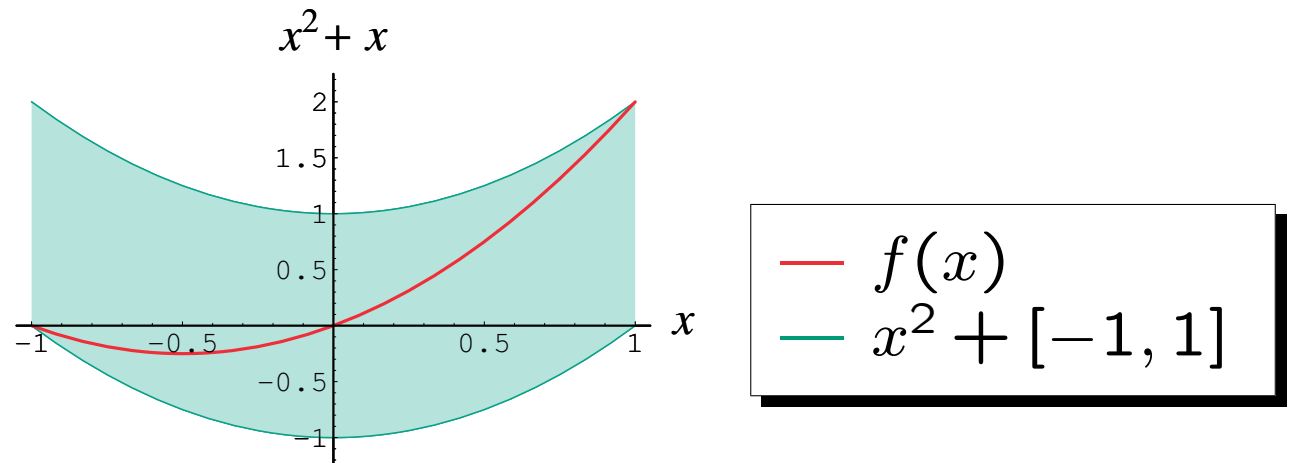
$$f(x) = g(x, x)$$

$$g([-1, 1], [-1, 1]) = [-1, 2]$$

## Das Abhängigkeitsproblem

Beispiel

$$f(x) = x^2 + x$$



Umformulierung

$$x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$\left([-1, 1] + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left[-\frac{1}{4}, 2\right]$$

## Symbolische Vorverarbeitung

---

### Modellierungsphase

Abhängigkeiten auflösen

$$\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \mapsto \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$



## Symbolische Vorverarbeitung

---

### Modellierungsphase

Abhängigkeiten auflösen

$$\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \mapsto \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

---

### Lösungsphase

Neue Abhängigkeiten vermeiden

$$\begin{array}{l} u = R \cdot i \\ j = i \end{array} \not\mapsto \begin{array}{l} \frac{1}{R} \cdot u = i \\ R \cdot j = u \end{array}$$



## Symbolische Vorverarbeitung

Lineares Gleichungssystem  
(mit Intervallen)

$$\begin{pmatrix} [R_1] & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & [R_2] & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ [V_0] \end{pmatrix}$$

## Symbolische Vorverarbeitung

Lineares Gleichungssystem  
(mit Intervallen)

$$\begin{pmatrix} [R_1] & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & [R_2] & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ [V_0] \end{pmatrix}$$



Neue Abhängigkeiten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/[R_1] & 0 & 0 \\ 0 & [R_2] & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1/[R_1] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ [V_0] \end{pmatrix}$$

## Symbolische Vorverarbeitung

Umsortierung  
(»Intervalle zuletzt«)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & [R_1] & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & [R_2] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_{in} \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ [V_0] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$


## Symbolische Vorverarbeitung

Umsortierung  
(»Intervalle zuletzt«)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & [R_1] & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & [R_2] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_{in} \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ [V_0] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Reellwertiges Auflösen

Reduziertes System



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & [R_1] & 0 \\ -1 & 0 & [R_2] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{in} \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [V_0] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



## Symbolische Vorverarbeitung

Umsortierung  
(»Intervalle zuletzt«)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & [R_1] & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & [R_2] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_{in} \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ [V_0] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Reellwertiges Auflösen

Reduziertes System

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & [R_1] & 0 \\ -1 & 0 & [R_2] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{in} \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [V_0] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scharfe Abschätzung

$$V_{in} \in [V_0], I_1 \in -\frac{[V_0]}{[R_1]} \text{ und } I_2 \in \frac{[V_0]}{[R_1]}$$

# Übersicht

1. Grundlagen
- 2. Symbolische Vorbetrachtungen**
  - Sichere äußere Abschätzungen durch Intervall-Methoden
  - Abhängigkeiten  $\Rightarrow$  grobe »Überschätzung«
  - Schärfere Ergebnisse durch geeignete Formulierung
3. Intervall-Analyse analoger Schaltungen
4. Anwendungsbeispiele
5. Zusammenfassung



# Übersicht

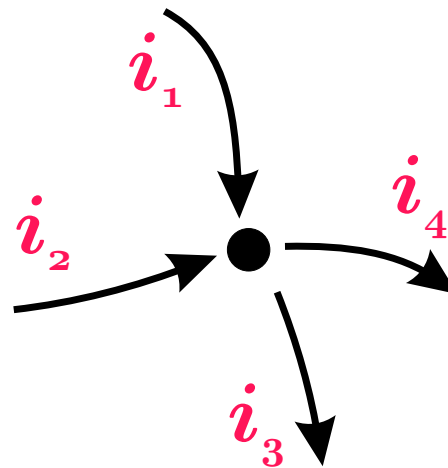
1. Grundlagen
2. Symbolische Vorbetrachtungen
- 3. Intervall-Analyse analoger Schaltungen**
  - Lineare Schaltungsanalyse
  - Ausfüllmuster
  - Resistive Netze
  - RLC-Netze
  - Nichtlineare Arbeitspunktanalyse
4. Anwendungsbeispiele
5. Zusammenfassung



## Lineare Schaltungsanalyse

Kirchhoffsche Knotenregel

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{0}$$



$$\sum_{\nu} i_{\nu} = 0$$



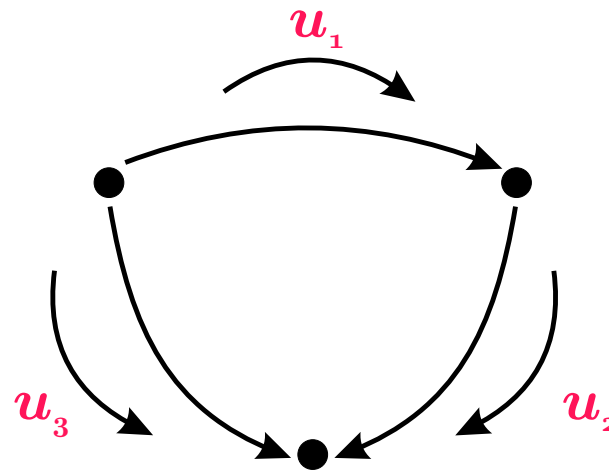
## Lineare Schaltungsanalyse

Kirchhoffsche Knotenregel

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = 0$$

Kirchhoffsche Maschenregel

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{u} = 0$$



$$\sum_{\nu} u_{\nu} = 0$$



## Lineare Schaltungsanalyse

Kirchhoffsche Knotenregel

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = 0$$

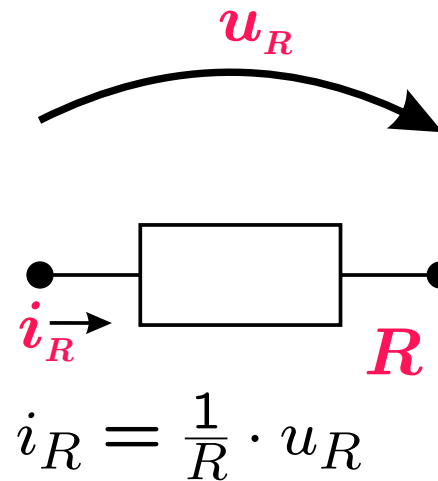
Kirchhoffsche Maschenregel

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{u} = 0$$

Bauelemente-Gleichungen

$$f(\mathbf{i}, \mathbf{u}, \mathbf{x}) = 0$$

Arbeitspunkt (DC)



## Lineare Schaltungsanalyse

Kirchhoffsche Knotenregel

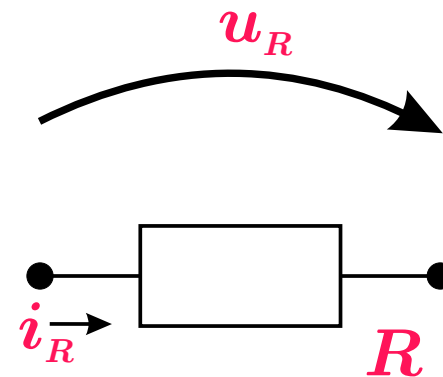
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = 0$$

Kirchhoffsche Maschenregel

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{u} = 0$$

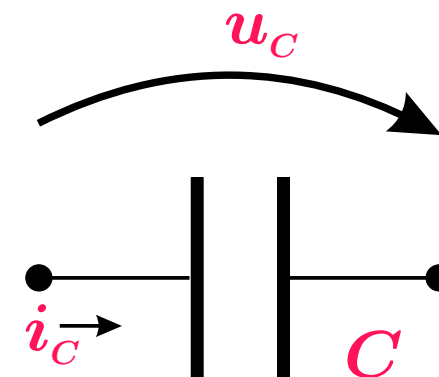
Bauelemente-Gleichungen

$$f(\mathbf{i}, \mathbf{u}, \mathbf{x}, s) = 0$$



$$i_R = \frac{1}{R} \cdot u_R$$

Frequenzbereich



$$i_C = C s \cdot u_C \quad s = 2\pi i f$$

## Lineare Schaltungsanalyse

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{p} \in [\mathbf{p}] \rightarrow \mathbf{x} = ?$$





## Lineare Schaltungsanalyse

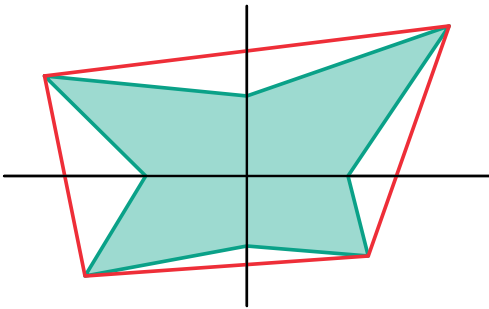
$$\mathbf{A}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{p} \in [\mathbf{p}] \rightarrow \mathbf{x} = ?$$

---

### Genauere Methode

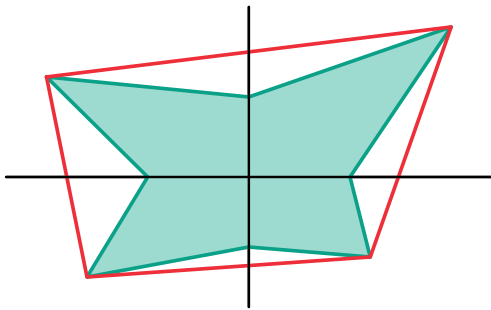
$$\mathbf{x} \in \text{conv}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$$

typisch  $\mathcal{O}(2^{n_p})$



## Lineare Schaltungsanalyse

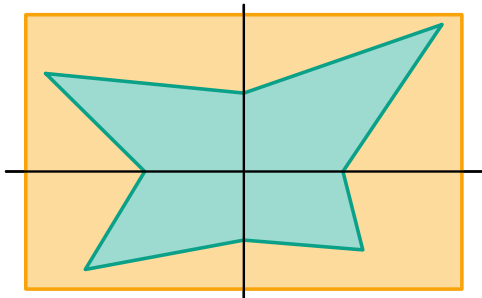
$$\mathbf{A}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{p} \in [\mathbf{p}] \rightarrow \mathbf{x} = ?$$



### Genauere Methode

$$\mathbf{x} \in \text{conv}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$$

typisch  $\mathcal{O}(2^{n_p})$



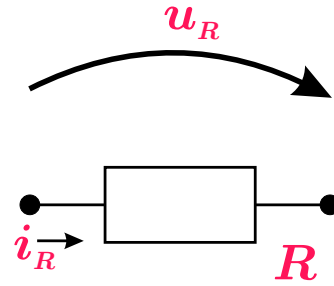
### Schnelle Methode

$$\mathbf{x} \in (\mathbf{x}_0 + [\mathbf{d}_1] + \dots + [\mathbf{d}_s])$$

typisch  $\mathcal{O}(n_p^2)$

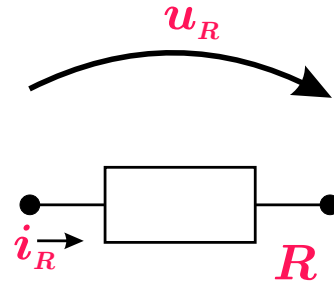
## Ausfüllmuster

Widerstand



## Ausfüllmuster

Widerstand

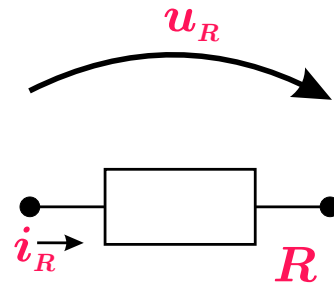


Sparse-Tableau

$$\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & -1 & \dots & \frac{1}{R} & \dots & & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ i_R \\ \vdots \\ u_R \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

## Ausfüllmuster

Widerstand



Sparse-Tableau

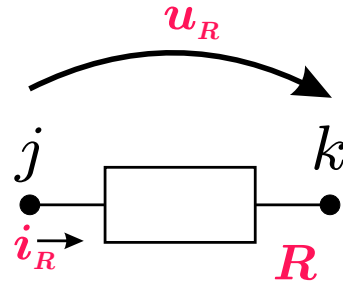
$$\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & -1 & \dots & \frac{1}{R} & \dots & & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ i_R \\ \vdots \\ u_R \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Überlagerung von Matrizen

$$p_i \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)$$

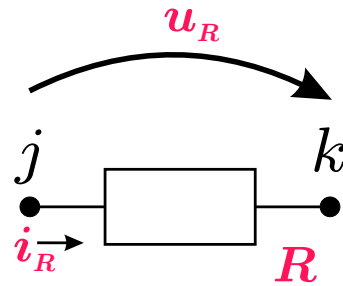
## Ausfüllmuster

Widerstand



## Ausfüllmuster

Widerstand

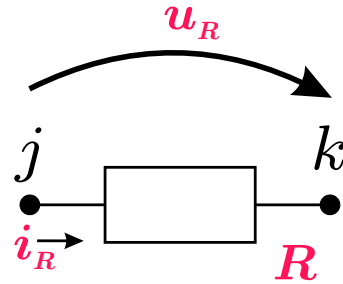


Modifizierte Knotenanalyse

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & -1 & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{R} & \dots & -\frac{1}{R} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & \dots & -1 & \dots & -\frac{1}{R} & \dots & \frac{1}{R} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ i_j \\ \vdots \\ i_k \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

## Ausfüllmuster

Widerstand



Modifizierte Knotenanalyse

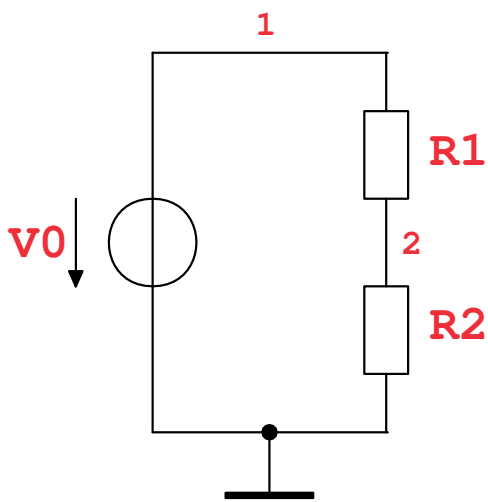
$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & -1 & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{R} & \dots & -\frac{1}{R} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & \dots & -1 & \dots & -\frac{1}{R} & \dots & \frac{1}{R} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ i_j \\ \vdots \\ i_k \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Allgemein

$$\left( \mathbf{A}_0 + \sum_i p_i \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T) \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{r}_0 + \sum_j s_j \cdot \mathbf{r}_j$$



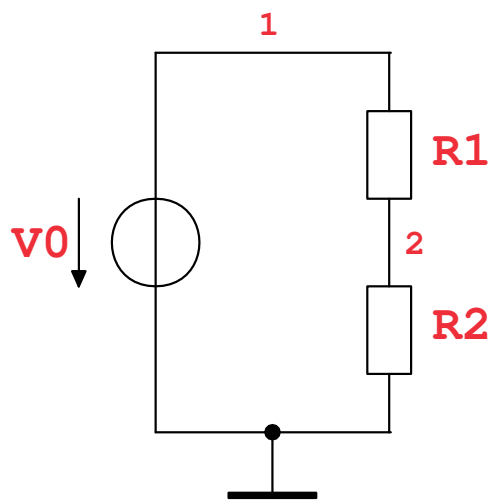
## Resistive Netze



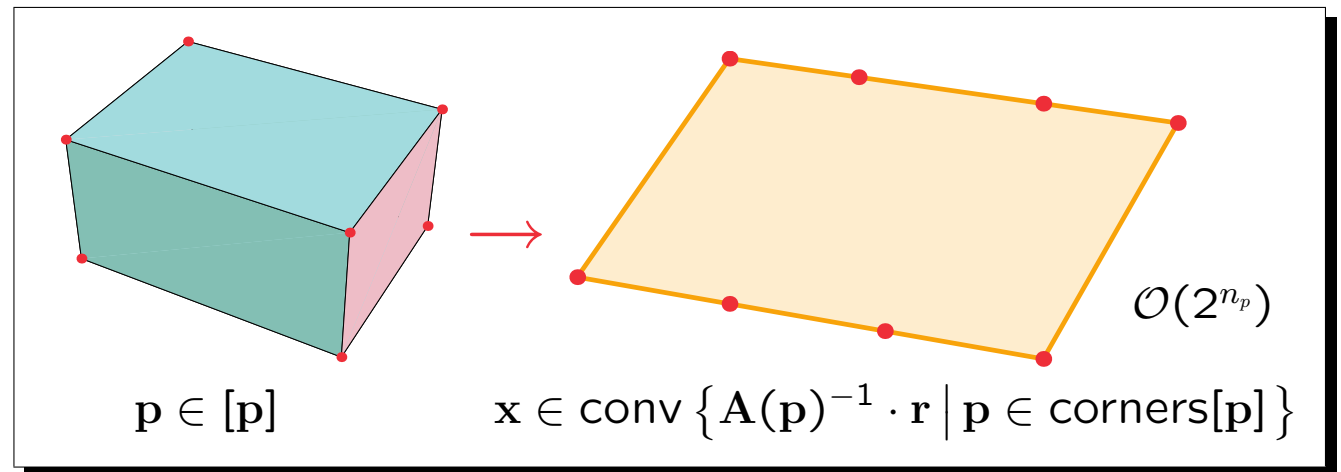
$$\left( A_0 + \sum_i p_i \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T) \right) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{r}$$

$$p_i \in [-\Delta p_i, \Delta p_i]$$

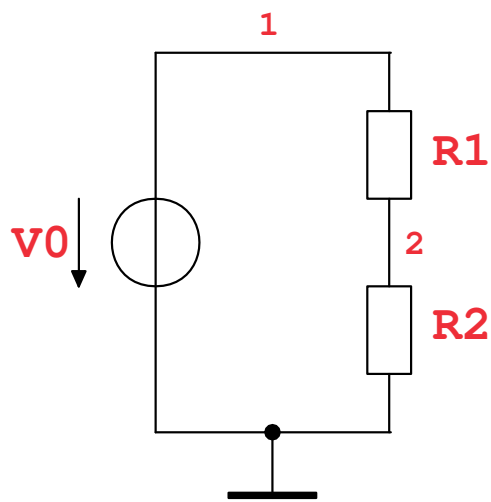
## Resistive Netze



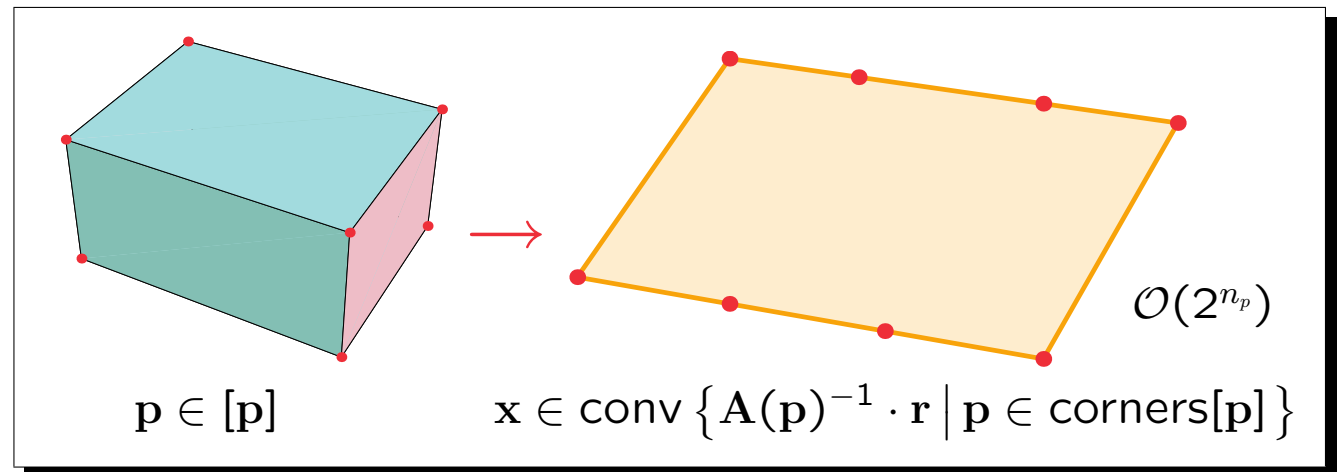
$$\left( \mathbf{A}_0 + \sum_i p_i \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T) \right) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{r} \quad p_i \in [-\Delta p_i, \Delta p_i]$$



## Resistive Netze



$$\left( \mathbf{A}_0 + \sum_i p_i \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T) \right) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{r} \quad p_i \in [-\Delta p_i, \Delta p_i]$$



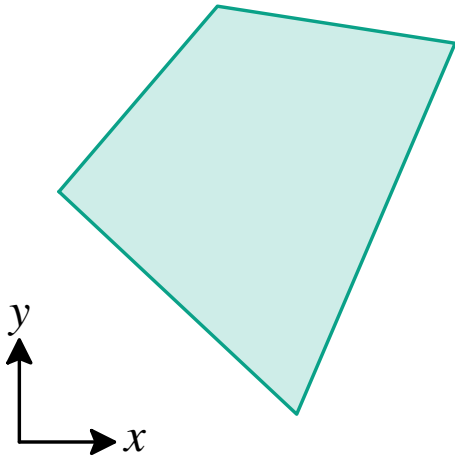
Regularitätsbedingung

$$0 \neq \text{sign det } \mathbf{A}(\mathbf{p}) = \text{const}$$

für  $\mathbf{p} \in \text{corners}[p]$

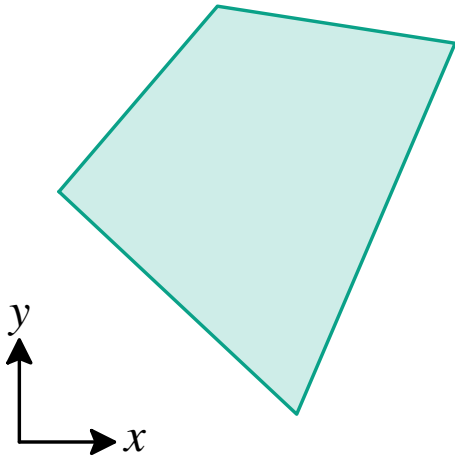


## Resistive Netze: Schnelle Variante



$$\left( \mathbf{A}_0 + \sum_{i \neq j} p_i \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T) + p_j \cdot (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_j^T) \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{r}$$
$$p_i \in [-\Delta p_i, \Delta p_i]$$

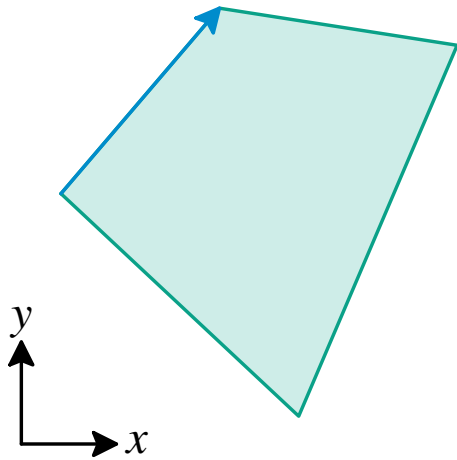
## Resistive Netze: Schnelle Variante



$$\underbrace{\left( \mathbf{A}_0 + \sum_{i \neq j} p_i \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T) + p_j \cdot (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_j^T) \right)}_{\mathbf{B}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{r}$$

$p_i \in [-\Delta p_i, \Delta p_i]$

## Resistive Netze: Schnelle Variante

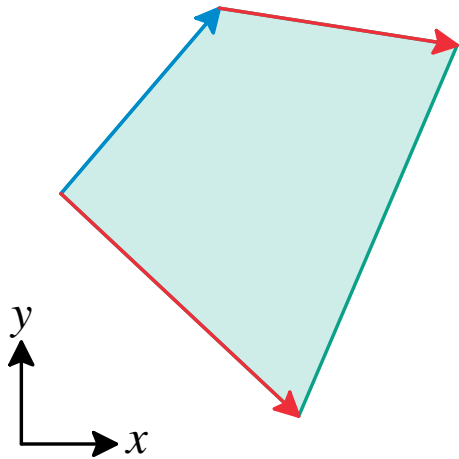


Sherman-Morrison-Formel

$$\underbrace{\left( \mathbf{A}_0 + \sum_{i \neq j} p_i \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T) + p_j \cdot (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_j^T) \right)}_{\mathbf{B}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{r} \quad p_i \in [-\Delta p_i, \Delta p_i]$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{r} - \left( \frac{1}{1/p_j + \mathbf{v}_j^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}_j} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T \mathbf{B}^{-1} \right) \mathbf{r}$$

## Resistive Netze: Schnelle Variante

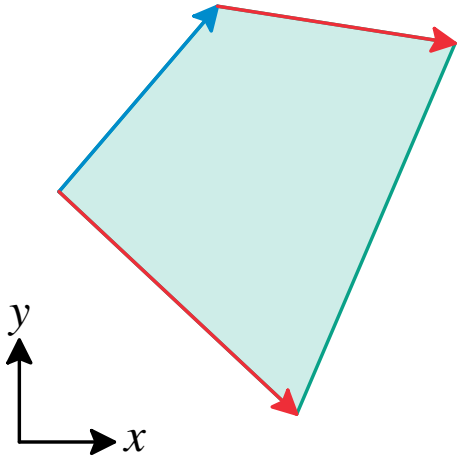


Sherman-Morrison-Formel

$$\underbrace{\left( \mathbf{A}_0 + \sum_{i \neq j} p_i \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T) + p_j \cdot (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_j^T) \right)}_{\mathbf{B}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{r} \quad p_i \in [-\Delta p_i, \Delta p_i]$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{r} - \left( \frac{1}{1/p_j + \mathbf{v}_j^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}_j} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T \mathbf{B}^{-1} \right) \mathbf{r}$$

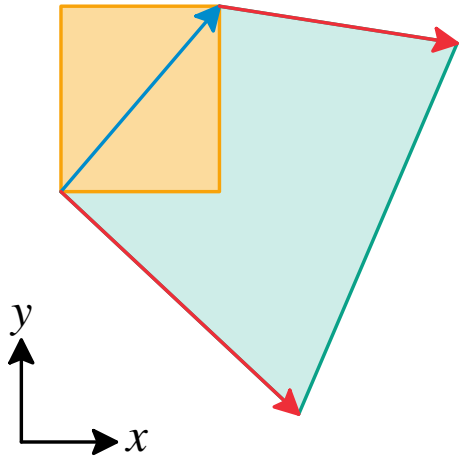
## Resistive Netze: Schnelle Variante



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{r} - \left( \frac{1}{1/p_j + \mathbf{v}_j^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}_j} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T \mathbf{B}^{-1} \right) \mathbf{r}$$



## Resistive Netze: Schnelle Variante



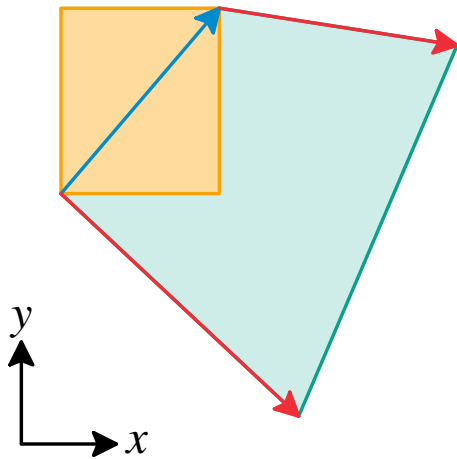
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{r} - \left( \frac{1}{1/p_j + \mathbf{v}_j^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}_j} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T \mathbf{B}^{-1} \right) \mathbf{r}$$

$$[\tilde{\mathbf{r}}] := \mathbf{A}_0^{-1} \cdot \mathbf{r}$$

$$[\tilde{\mathbf{u}}_j] := \mathbf{A}_0^{-1} \cdot \mathbf{u}_j$$

$$[y] = 1/[p_j] + \mathbf{v}_j^T \cdot [\tilde{\mathbf{u}}_j]$$

## Resistive Netze: Schnelle Variante



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{r} - \left( \frac{1}{1/p_j + \mathbf{v}_j^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}_j} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T \mathbf{B}^{-1} \right) \mathbf{r}$$

$$[\tilde{\mathbf{r}}] := \mathbf{A}_0^{-1} \cdot \mathbf{r}$$

$$[\tilde{\mathbf{u}}_j] := \mathbf{A}_0^{-1} \cdot \mathbf{u}_j$$

$$[y] = 1/[p_j] + \mathbf{v}_j^T \cdot [\tilde{\mathbf{u}}_j]$$

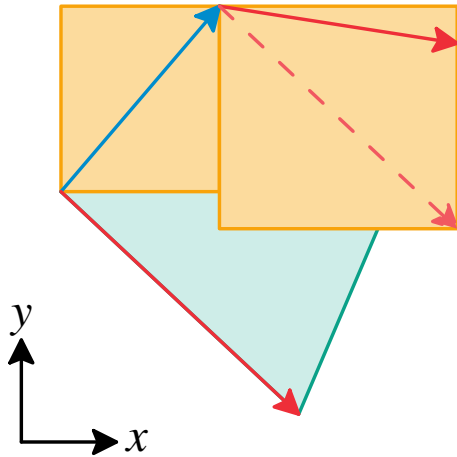
**Wenn**  $[y] \neq 0$

$$[\tilde{\mathbf{r}}] \leftarrow [\tilde{\mathbf{r}}] - \frac{1}{[y]} \cdot ([\tilde{\mathbf{u}}_j] \cdot (\mathbf{v}_j^T \cdot [\tilde{\mathbf{r}}]))$$

Regularitätstest

Intervall-Sherman-Morrison

## Resistive Netze: Schnelle Variante



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{r} - \left( \frac{1}{1/p_j + \mathbf{v}_j^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}_j} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T \mathbf{B}^{-1} \right) \mathbf{r}$$

### Initialisierung

$$[\tilde{\mathbf{r}}] := \mathbf{A}_0^{-1} \cdot \mathbf{r}$$

$$[\tilde{\mathbf{u}}_j] := \mathbf{A}_0^{-1} \cdot \mathbf{u}_j, \quad j = 1, \dots, n_p$$

Für  $j = 1, \dots, n_p$

$$[y] = 1/[p_j] + \mathbf{v}_j^T \cdot [\tilde{\mathbf{u}}_j]$$

Wenn  $[y] \neq 0$

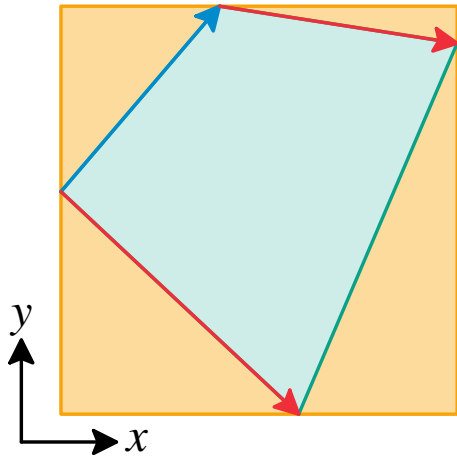
$$[\tilde{\mathbf{r}}] \leftarrow [\tilde{\mathbf{r}}] - \frac{1}{[y]} \cdot ([\tilde{\mathbf{u}}_j] \cdot (\mathbf{v}_j^T \cdot [\tilde{\mathbf{r}}]))$$

$$[\tilde{\mathbf{u}}_i] \leftarrow [\tilde{\mathbf{u}}_i] - \frac{1}{[y]} \cdot ([\tilde{\mathbf{u}}_j] \cdot (\mathbf{v}_j^T \cdot [\tilde{\mathbf{u}}_i])), \quad i > j$$

Regularitätstest

Intervall-Sherman-Morrison

## Resistive Netze: Schnelle Variante



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{r} - \left( \frac{1}{1/p_j + \mathbf{v}_j^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}_j} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T \mathbf{B}^{-1} \right) \mathbf{r}$$

### Initialisierung

$$[\tilde{\mathbf{r}}] := \mathbf{A}_0^{-1} \cdot \mathbf{r}$$

$$[\tilde{\mathbf{u}}_j] := \mathbf{A}_0^{-1} \cdot \mathbf{u}_j, \quad j = 1, \dots, n_p$$

Für  $j = 1, \dots, n_p$

$$[y] = 1/[p_j] + \mathbf{v}_j^T \cdot [\tilde{\mathbf{u}}_j]$$

Wenn  $[y] \neq 0$

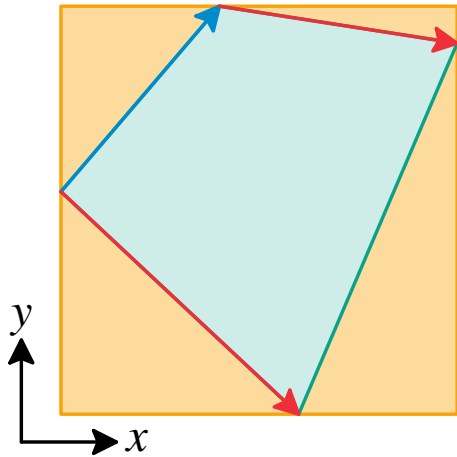
$$[\tilde{\mathbf{r}}] \leftarrow [\tilde{\mathbf{r}}] - \frac{1}{[y]} \cdot ([\tilde{\mathbf{u}}_j] \cdot (\mathbf{v}_j^T \cdot [\tilde{\mathbf{r}}]))$$

$$[\tilde{\mathbf{u}}_i] \leftarrow [\tilde{\mathbf{u}}_i] - \frac{1}{[y]} \cdot ([\tilde{\mathbf{u}}_j] \cdot (\mathbf{v}_j^T \cdot [\tilde{\mathbf{u}}_i])), \quad i > j$$

Regularitätstest

Intervall-Sherman-Morrison

## Resistive Netze: Schnelle Variante



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{r} - \left( \frac{1}{1/p_j + \mathbf{v}_j^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}_j} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T \mathbf{B}^{-1} \right) \mathbf{r}$$

### Initialisierung

$$[\tilde{\mathbf{r}}] := \mathbf{A}_0^{-1} \cdot \mathbf{r}$$

$$[\tilde{\mathbf{u}}_j] := \mathbf{A}_0^{-1} \cdot \mathbf{u}_j, \quad j = 1, \dots, n_p$$

Für  $j = 1, \dots, n_p$

$$[y] = 1/[p_j] + \mathbf{v}_j^T \cdot [\tilde{\mathbf{u}}_j]$$

Wenn  $[y] \neq 0$

$$[\tilde{\mathbf{r}}] \leftarrow [\tilde{\mathbf{r}}] - \frac{1}{[y]} \cdot ([\tilde{\mathbf{u}}_j] \cdot (\mathbf{v}_j^T \cdot [\tilde{\mathbf{r}}]))$$

$$[\tilde{\mathbf{u}}_i] \leftarrow [\tilde{\mathbf{u}}_i] - \frac{1}{[y]} \cdot ([\tilde{\mathbf{u}}_j] \cdot (\mathbf{v}_j^T \cdot [\tilde{\mathbf{u}}_i])), \quad i > j$$

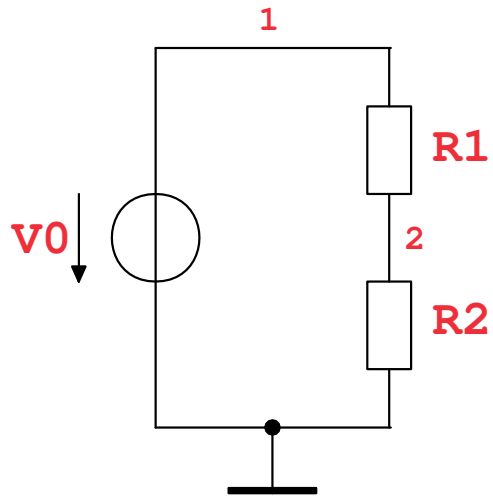
$\mathcal{O}(n_p^2)$  »bezahlt«  
durch Ungenauigkeit

- **Wrapping-Effekt**  
 $[\mathbf{x}] \supseteq \text{conv}\{\mathbf{x}_\nu\}_\nu$
- **Abhängigkeiten**  
 $[\tilde{\mathbf{u}}_\nu] \leftrightarrow [\tilde{\mathbf{u}}_\mu]$

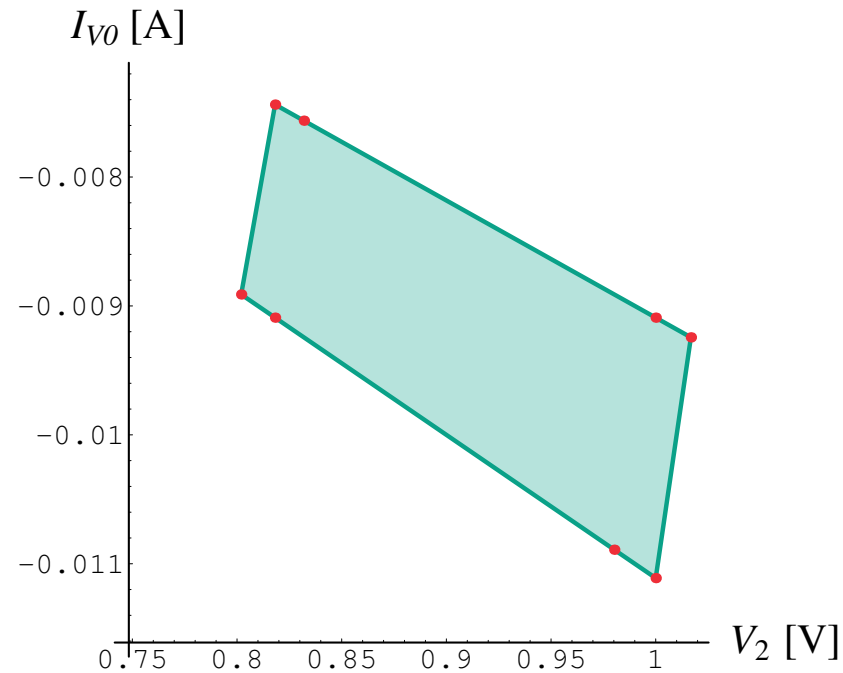
Regularitätstest

Intervall-Sherman-Morrison

## Resistive Netze

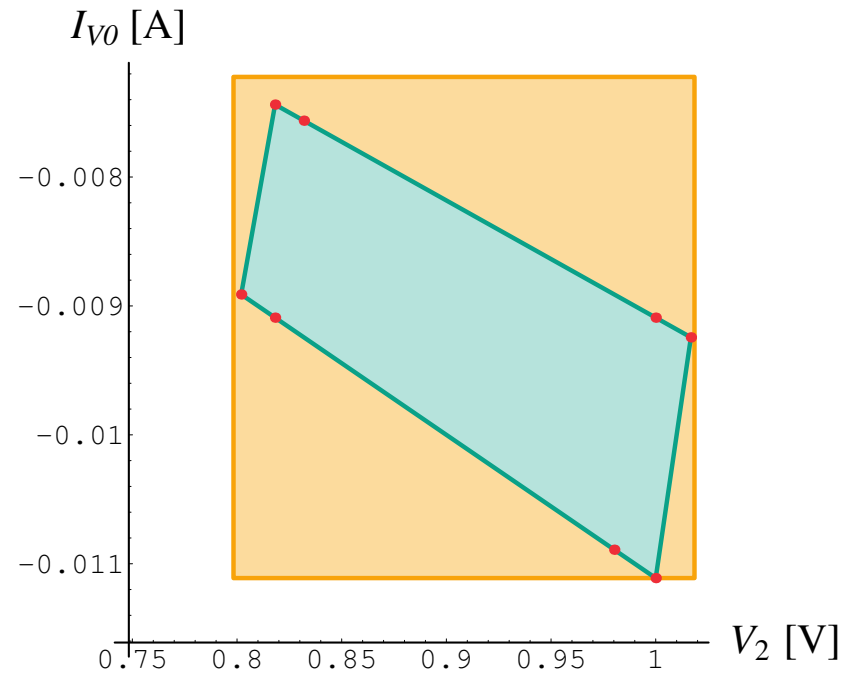
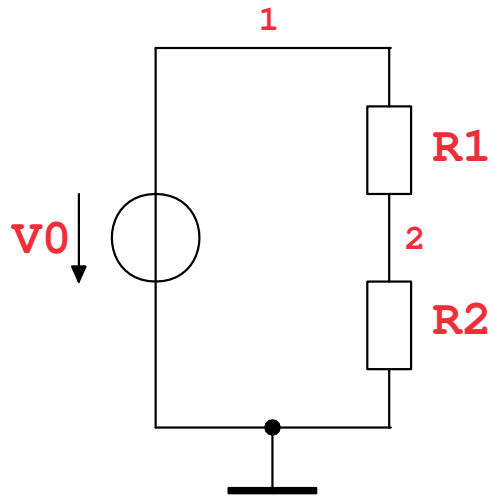


— conv(.....)



$V_0 = 1\text{ V}$   
 $R_1 = 10\ \Omega$   
 $R_2 = 100\ \Omega$   
Toleranz  $\pm 10\%$

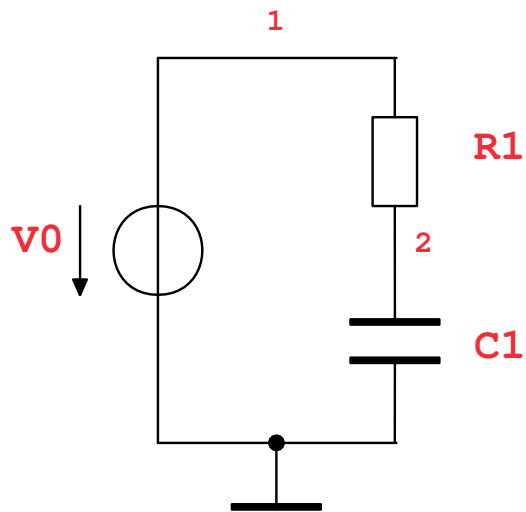
## Resistive Netze



$V_0 = 1 \text{ V}$   
 $R_1 = 10 \Omega$   
 $R_2 = 100 \Omega$   
Toleranz  $\pm 10\%$

— conv(.....)  
— Schnelle Variante

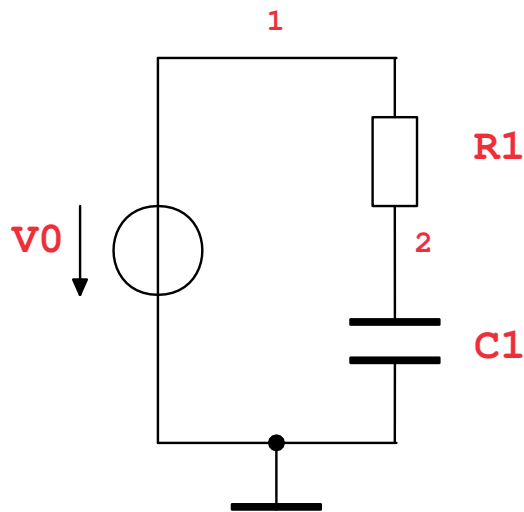
## RLC-Netze



$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 1 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + C_1 s & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_{V_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_0 \end{pmatrix} \quad s = 2\pi i f \in \mathbb{C}$$



## RLC-Netze



$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 1 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + C_1 s & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_{V_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_0 \end{pmatrix} \quad s = 2\pi i f \in \mathbb{C}$$



Reelle Darstellung

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & -C_1 2\pi f & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 1 \\ 0 & C_1 2\pi f & 0 & -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Re } V_1 \\ \text{Re } V_2 \\ \text{Re } I_{V_0} \\ \text{Im } V_1 \\ \text{Im } V_2 \\ \text{Im } I_{V_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## RLC-Netze

---

### Ausfüllmuster

Zwei Muster pro Parameter

$$\left( \mathbf{A} + \sum_i p_i \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T) + \sum_i p_i \cdot (\tilde{\mathbf{u}}_i \cdot \tilde{\mathbf{v}}_i^T) \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{r}$$



## RLC-Netze

### Ausfüllmuster

Zwei Muster pro Parameter

$$\left( \mathbf{A} + \sum_i p_i \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T) + \sum_i p_i \cdot (\tilde{\mathbf{u}}_i \cdot \tilde{\mathbf{v}}_i^T) \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{r}$$

### Äußere Abschätzung

Getrennte Behandlung

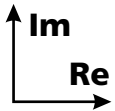
$$\left( \mathbf{A} + \sum_i p_i \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T) + \sum_i \tilde{p}_i \cdot (\tilde{\mathbf{u}}_i \cdot \tilde{\mathbf{v}}_i^T) \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{r}$$



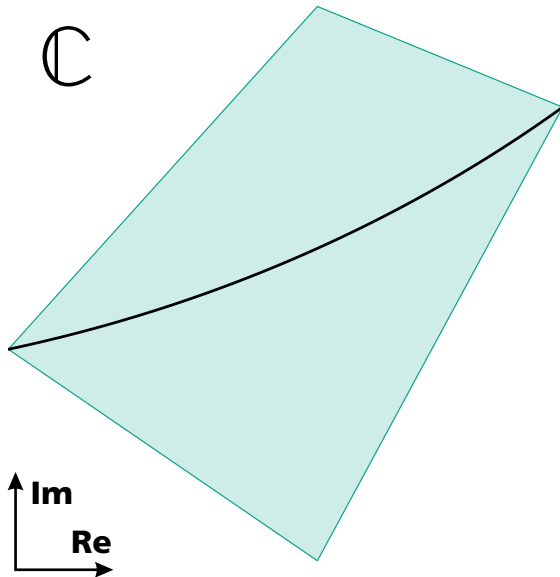
## RLC-Netze

$\mathbb{C}$

$$(\mathbf{A}_0 + p \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T) + p \cdot (\check{\mathbf{u}}_i \cdot \check{\mathbf{v}}_i^T)) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{r}$$



## RLC-Netze

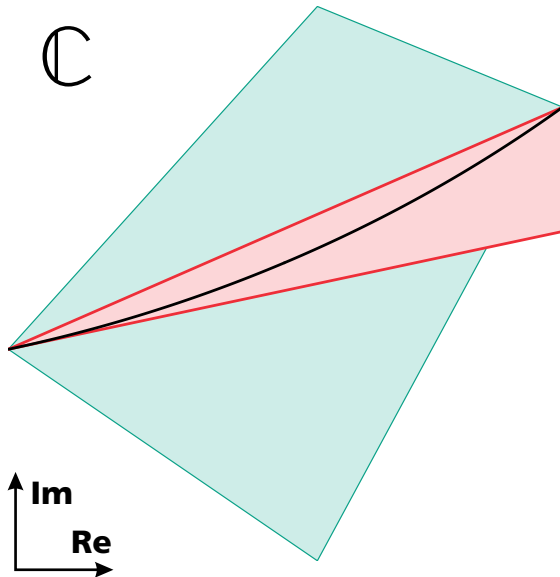


$$(\mathbf{A}_0 + p \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T) + q \cdot (\check{\mathbf{u}}_i \cdot \check{\mathbf{v}}_i^T)) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{A}(p, q) := \mathbf{A}_0 + p \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T) + q \cdot (\check{\mathbf{u}} \cdot \check{\mathbf{v}}^T), \text{ regulär } p, q \in [-\Delta p, \Delta p]$$

$$\mathbf{x} \in \text{conv} \left\{ \begin{array}{cc} & \mathbf{A}(-\Delta p, \Delta p)^{-1} \mathbf{r} \\ \mathbf{A}(-\Delta p, -\Delta p)^{-1} \mathbf{r} & \mathbf{A}(\Delta p, \Delta p)^{-1} \mathbf{r} \\ & \mathbf{A}(\Delta p, -\Delta p)^{-1} \mathbf{r} \end{array} \right\}$$

## RLC-Netze



$$(\mathbf{A}_0 + p \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T) + q \cdot (\check{\mathbf{u}}_i \cdot \check{\mathbf{v}}_i^T)) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{A}(p, q) := \mathbf{A}_0 + p \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T) + q \cdot (\check{\mathbf{u}} \cdot \check{\mathbf{v}}^T), \text{ regulär } p, q \in [-\Delta p, \Delta p]$$

$$\mathbf{x} \in \text{conv} \left\{ \begin{array}{ccc} & \mathbf{A}(-\Delta p, \Delta p)^{-1} \mathbf{r} & \\ \mathbf{A}(-\Delta p, -\Delta p)^{-1} \mathbf{r} & \text{■} & \mathbf{A}(\Delta p, \Delta p)^{-1} \mathbf{r} \\ & \mathbf{A}(\Delta p, -\Delta p)^{-1} \mathbf{r} & \end{array} \right\}$$

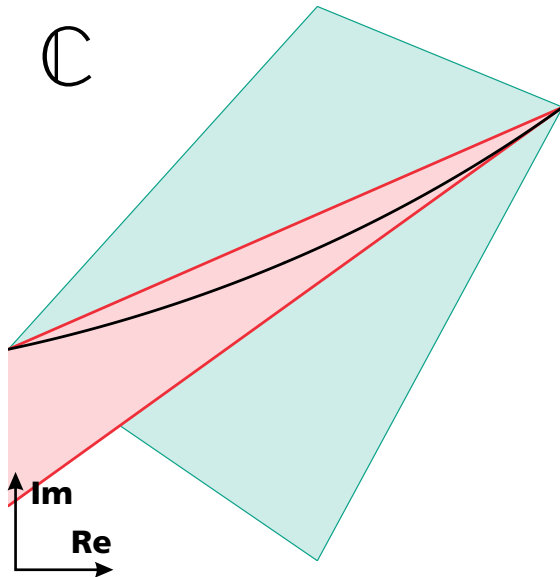
$$\mathbf{x} \in \{ \mathbf{A}(-\Delta p, -\Delta p)^{-1} \mathbf{r} + \lambda \cdot \mathbf{d}_1 + \mu \cdot \mathbf{t}_1 \mid \lambda, \mu \geq 0 \}$$

$\mathbf{d}_1$  Diagonale

$\mathbf{t}_1$  Tangente

Verallgemeinerte  
Sherman-Morrison-Formel

## RLC-Netze



$$(\mathbf{A}_0 + p \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T) + q \cdot (\check{\mathbf{u}}_i \cdot \check{\mathbf{v}}_i^T)) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{A}(p, q) := \mathbf{A}_0 + p \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T) + q \cdot (\check{\mathbf{u}} \cdot \check{\mathbf{v}}^T), \text{ regulär } p, q \in [-\Delta p, \Delta p]$$

$$\mathbf{x} \in \text{conv} \left\{ \begin{array}{ccc} & \mathbf{A}(-\Delta p, \Delta p)^{-1} \mathbf{r} & \\ \mathbf{A}(-\Delta p, -\Delta p)^{-1} \mathbf{r} & & \mathbf{A}(\Delta p, \Delta p)^{-1} \mathbf{r} \\ & \mathbf{A}(\Delta p, -\Delta p)^{-1} \mathbf{r} & \end{array} \right\}$$

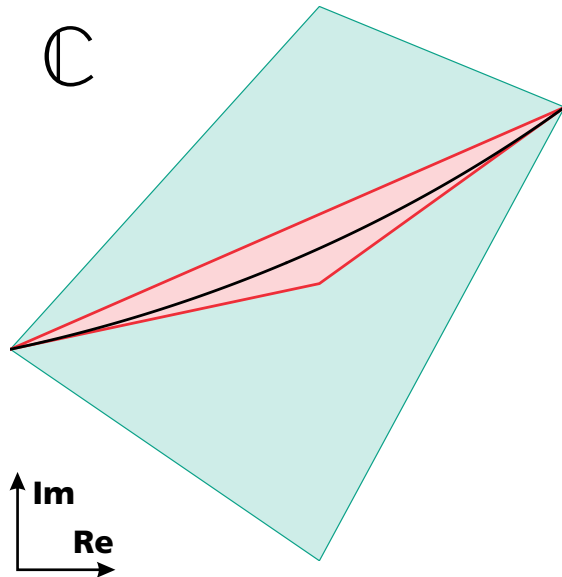
Verallgemeinerte  
Sherman-Morrison-Formel

$$\mathbf{x} \in \{ \mathbf{A}(\Delta p, \Delta p)^{-1} \mathbf{r} + \lambda \cdot \mathbf{d}_2 + \mu \cdot \mathbf{t}_2 \mid \lambda, \mu \geq 0 \}$$

$\mathbf{d}_2$  Diagonale

$\mathbf{t}_2$  Tangente

## RLC-Netze



$$(\mathbf{A}_0 + p \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T) + q \cdot (\check{\mathbf{u}}_i \cdot \check{\mathbf{v}}_i^T)) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{r}$$

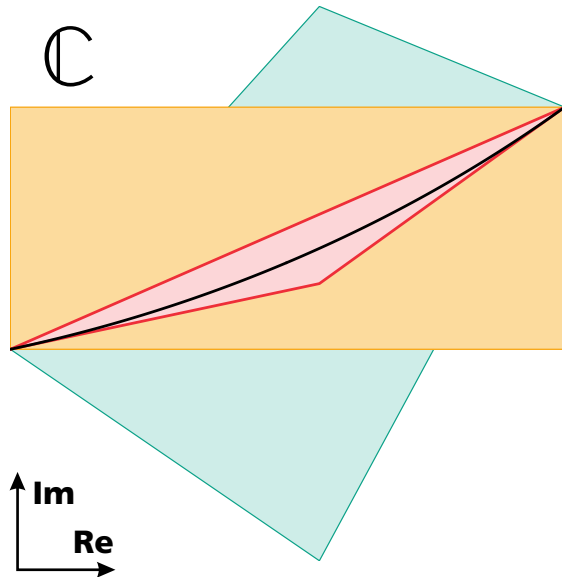
$$\mathbf{A}(p, q) := \mathbf{A}_0 + p \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T) + q \cdot (\check{\mathbf{u}} \cdot \check{\mathbf{v}}^T), \text{ regulär } p, q \in [-\Delta p, \Delta p]$$

$$\mathbf{x} \in \text{conv} \left\{ \begin{array}{cc} & \mathbf{A}(-\Delta p, \Delta p)^{-1} \mathbf{r} \\ \mathbf{A}(-\Delta p, -\Delta p)^{-1} \mathbf{r} & \mathbf{A}(\Delta p, \Delta p)^{-1} \mathbf{r} \\ & \mathbf{A}(\Delta p, -\Delta p)^{-1} \mathbf{r} \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{x} \in \text{conv} \left\{ \begin{array}{cc} \mathbf{A}(-\Delta p, -\Delta p)^{-1} \mathbf{r} & \mathbf{A}(\Delta p, \Delta p)^{-1} \mathbf{r} \\ & \frac{1}{2} (\mathbf{A}(-\Delta p, \Delta p)^{-1} \mathbf{r} + \mathbf{A}(\Delta p, -\Delta p)^{-1} \mathbf{r}) \end{array} \right\}$$



## RLC-Netze



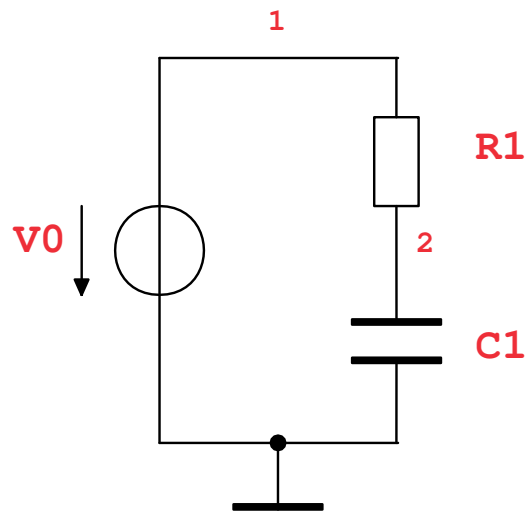
$$(\mathbf{A}_0 + p \cdot (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_i^T) + q \cdot (\check{\mathbf{u}}_i \cdot \check{\mathbf{v}}_i^T)) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{A}(p, q) := \mathbf{A}_0 + p \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T) + q \cdot (\check{\mathbf{u}} \cdot \check{\mathbf{v}}^T), \text{ regulär } p, q \in [-\Delta p, \Delta p]$$

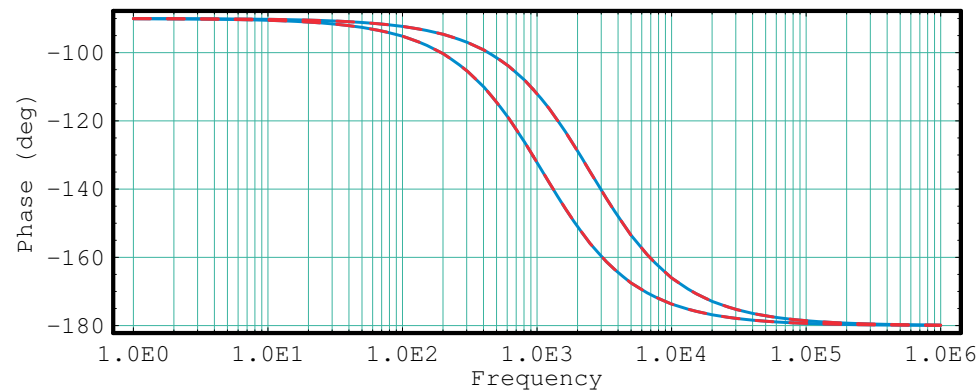
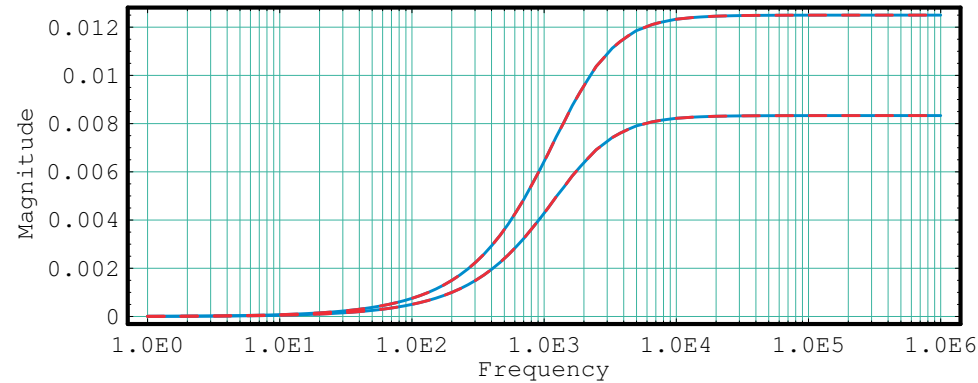
$$\mathbf{x} \in \text{conv} \left\{ \begin{array}{cc} \mathbf{A}(-\Delta p, \Delta p)^{-1} \mathbf{r} & \mathbf{A}(\Delta p, \Delta p)^{-1} \mathbf{r} \\ \mathbf{A}(-\Delta p, -\Delta p)^{-1} \mathbf{r} & \mathbf{A}(\Delta p, -\Delta p)^{-1} \mathbf{r} \end{array} \right\}$$

$$[\mathbf{x}] \supseteq \text{conv} \left\{ \begin{array}{cc} \mathbf{A}(-\Delta p, -\Delta p)^{-1} \mathbf{r} & \mathbf{A}(\Delta p, \Delta p)^{-1} \mathbf{r} \\ \frac{1}{2} (\mathbf{A}(-\Delta p, \Delta p)^{-1} \mathbf{r} + \mathbf{A}(\Delta p, -\Delta p)^{-1} \mathbf{r}) & \end{array} \right\}$$

## RLC-Netze

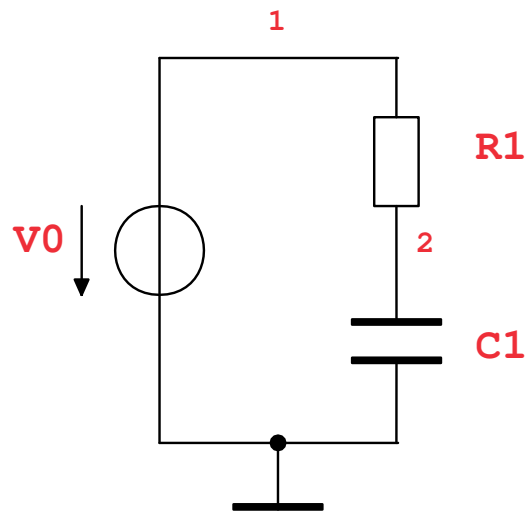


— Innere Näherung für  $I_{V_0}$   
 — IntervalACAnalysis

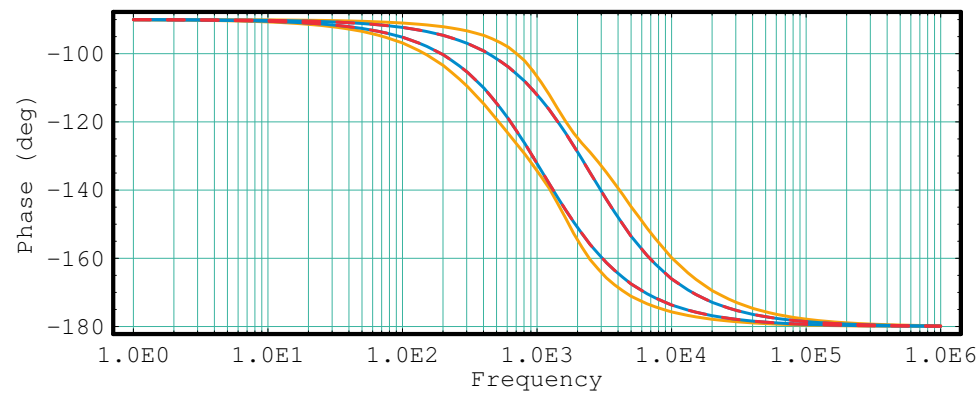
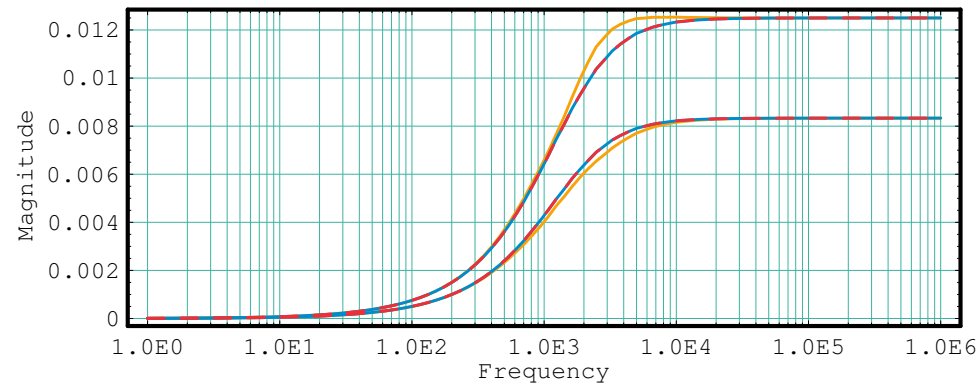


$V_1 = 1 \text{ V}$   
 $R_1 = 100 \Omega$   
 $\pm 20\%$   
 $C_1 = 1 \mu\text{F}$   
 $\pm 20\%$

## RLC-Netze



— Innere Näherung für  $I_{V_0}$   
— IntervalACAnalysis  
— QuickACAnalysis



$V_1 = 1 \text{ V}$   
 $R_1 = 100 \Omega$   
 $\pm 20\%$   
 $C_1 = 1 \mu\text{F}$   
 $\pm 20\%$

## Nichtlineare Arbeitspunktanalyse

Arbeitspunkt  $\mathbf{x}^*$

$f(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}) = 0$  statisches nichtlineares Gleichungssystem für ein  $\mathbf{p}$

Variation durch Toleranzen

$[\mathbf{x}] \supseteq \{ \mathbf{x}^* \mid f(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}) = 0 \text{ für alle } \mathbf{p} \in [\mathbf{p}] \}$



## Nichtlineare Arbeitspunktanalyse

Arbeitspunkt  $\mathbf{x}^*$

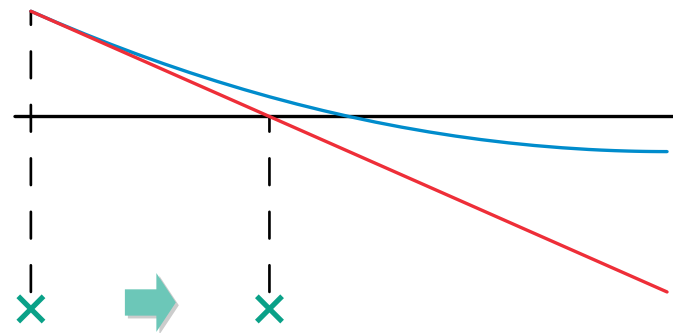
$f(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}) = 0$  statisches nichtlineares Gleichungssystem für ein  $\mathbf{p}$

Variation durch Toleranzen

$[\mathbf{x}] \supseteq \{ \mathbf{x}^* \mid f(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}) = 0 \text{ für alle } \mathbf{p} \in [\mathbf{p}] \}$

Standard-Newton-Schritt

$$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} - \mathbf{J}_f(\mathbf{x}, \mathbf{p})^{-1} \cdot f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$$



## Nichtlineare Arbeitspunktanalyse

Arbeitspunkt  $\mathbf{x}^*$

$f(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}) = 0$  statisches nichtlineares Gleichungssystem für ein  $\mathbf{p}$

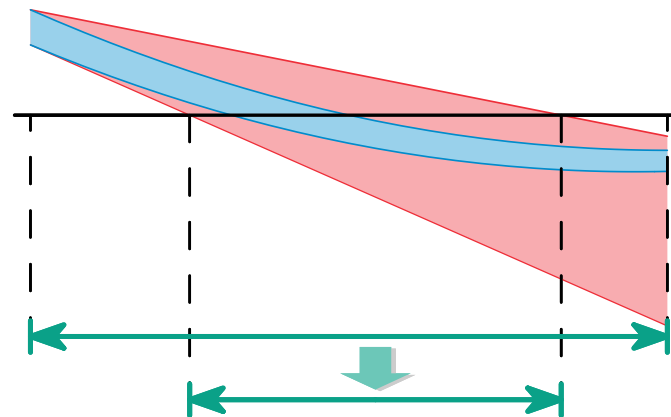
Variation durch Toleranzen

$[\mathbf{x}] \supseteq \{ \mathbf{x}^* \mid f(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}) = 0 \text{ für alle } \mathbf{p} \in [\mathbf{p}] \}$

Intervall-Newton-Schritt

Wähle  $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}]$

$[\mathbf{x}] \leftarrow \mathbf{x} - [\mathbf{J}_f](\mathbf{x}, [\mathbf{p}])^{-1} \cdot f(\mathbf{x}, [\mathbf{p}])$



## Nichtlineare Arbeitspunktanalyse

Ausfüllmuster für Newton-Schritt  $\mathbf{J}_f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^{n_p} p_i \cdot \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T + \sum_{i=n_p+1}^{n_0} g_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$

$$p_i \in [p_i]$$



## Nichtlineare Arbeitspunktanalyse

Ausfüllmuster für Newton-Schritt  $\mathbf{J}_f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^{n_p} p_i \cdot \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T + \sum_{i=n_p+1}^{n_0} q_i \cdot \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$

$$p_i \in [p_i], q_i \in [q_i] \supseteq g_i([\mathbf{x}], [\mathbf{p}])$$





## Nichtlineare Arbeitspunktanalyse

Ausfüllmuster für Newton-Schritt  $\mathbf{J}_f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^{n_p} p_i \cdot \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T + \sum_{i=n_p+1}^{n_0} q_i \cdot \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$

$$p_i \in [p_i], q_i \in [q_i] \supseteq g_i([\mathbf{x}], [\mathbf{p}])$$

### Beispiel

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \vdots \\ \dots + e^{x_j - x_k} + \dots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{J}]_f([\mathbf{x}]) = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \dots e^{[x_j] - [x_k]} \dots - e^{[x_j] - [x_k]} \dots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$



## Nichtlineare Arbeitspunktanalyse

Ausfüllmuster für Newton-Schritt 
$$\mathbf{J}_f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^{n_p} p_i \cdot \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T + \sum_{i=n_p+1}^{n_0} q_i \cdot \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

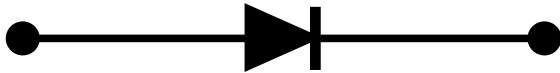
$$p_i \in [p_i], q_i \in [q_i] \supseteq g_i([\mathbf{x}], [\mathbf{p}])$$

### Beispiel

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \vdots \\ \dots + e^{x_j - x_k} + \dots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

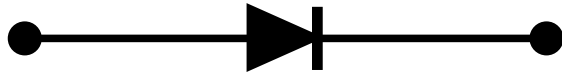
$$\begin{aligned} [\mathbf{J}]_f([\mathbf{x}]) &= \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \dots e^{[x_j] - [x_k]} \dots - e^{[x_j] - [x_k]} \dots \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{1} \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot (\dots \mathbf{1} \dots -\mathbf{1} \dots) \cdot e^{[x_j] - [x_k]} \end{aligned}$$

## Nichtlineare Arbeitspunktanalyse



$$I_{\text{Diode}} = I_s \cdot \left( e^{\frac{V_{\text{Diode}}}{kT} q} - 1 \right)$$

## Nichtlineare Arbeitspunktanalyse



$$I_{\text{Diode}} = I_s \cdot \left( e^{\frac{V_{\text{Diode}}}{kT} q} - 1 \right)$$

Sättigungsstrom  $I_s \in [I_s]$

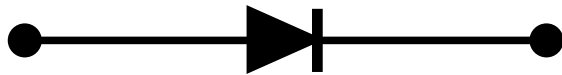
Temperatur (in Kelvin)  $T \approx 300 \text{ K}$

Boltzmann-Konstante  $k \approx 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ Ws/K}$

Elementarladung  $q \approx 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ A s}$




## Nichtlineare Arbeitspunktanalyse



$$I_{\text{Diode}} = I_s \cdot \left( e^{\frac{V_{\text{Diode}}}{kT} q} - 1 \right)$$

Lineares Ausfüllmuster

Nichtlinearer Anteil


$$I_{\text{Diode}} = I_s \cdot \tilde{I}_{\text{Diode}}$$

$$\tilde{I}_{\text{Diode}} = e^{\frac{V_{\text{Diode}}}{kT} q} - 1$$

Sättigungsstrom  $I_s \in [I_s]$

Temperatur (in Kelvin)  $T \approx 300 \text{ K}$

Boltzmann-Konstante  $k \approx 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ Ws/K}$

Elementarladung  $q \approx 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ A s}$

# Übersicht

1. Grundlagen
2. Symbolische Vorbetrachtungen
- 3. Intervall-Analyse analoger Schaltungen**
  - Effiziente Behandlung toleranzbehafteter Schaltungen unter Berücksichtigung von Ausfüllmustern
  - Scharfe Abschätzung komplexwertiger Probleme (Frequenzbereich)
  - Reformulierung nichtlinearer Modelle
  - Genauigkeit  $\Leftrightarrow$  Rechenzeit
4. Anwendungsbeispiele
5. Zusammenfassung



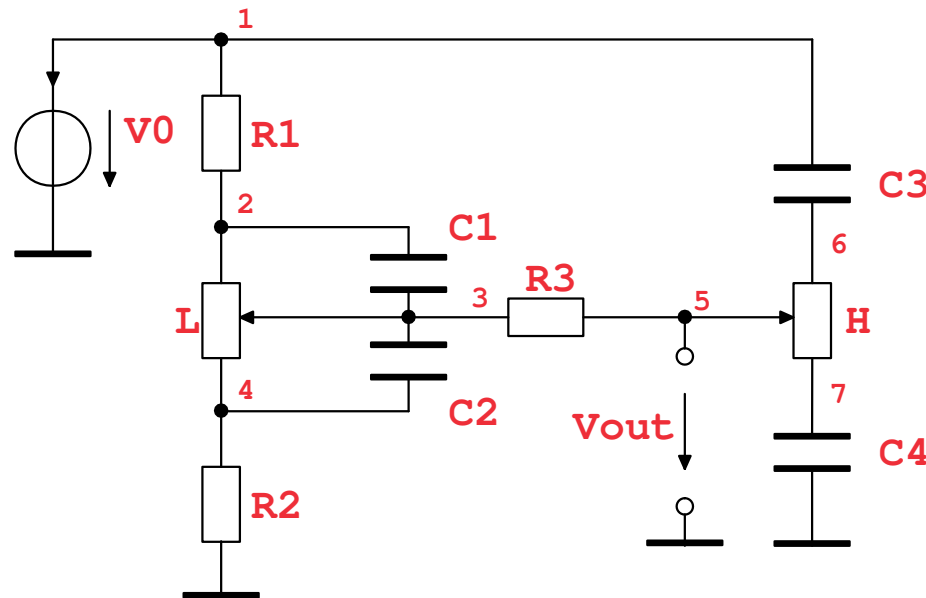
# Übersicht

1. Grundlagen
2. Symbolische Vorbetrachtungen
3. Intervall-Analyse analoger Schaltungen
- 4. Anwendungsbeispiele**
  - AC-Analyse einer Klangregelschaltung
  - AC-Analyse eines Operationsverstärkers
  - DC-Transfer-Analyse eines Differenz-Verstärkers
5. Zusammenfassung



## AC-Analyse einer Klangregelschaltung

Verhalten bei  
minimaler/maximaler  
Potentiometer-Einstellung



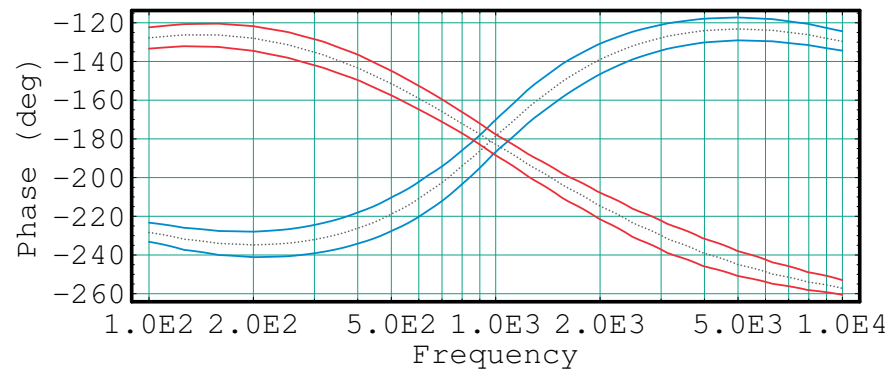
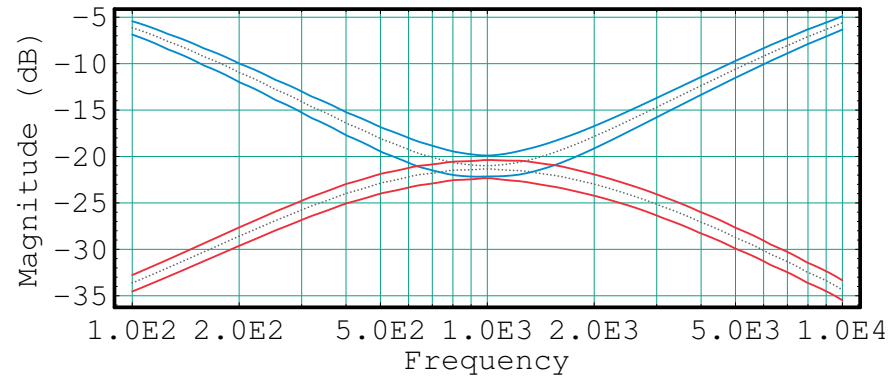
$V_0 = 1\text{ V}$   
 $R_1 = 10\text{ k}\Omega$   
 $R_2 = 1\text{ k}\Omega$   
 $R_3 = 10\text{ k}\Omega$   
 $C_1 = 22\text{ nF}$   
 $C_2 = 220\text{ nF}$   
 $C_3 = 1\text{ nF}$   
 $C_4 = 15\text{ nF}$   
( $L$ :  $0..100\text{ k}\Omega$   
 $H$ :  $0..100\text{ k}\Omega$ )

Toleranzspezifikation  $\pm 5\%$



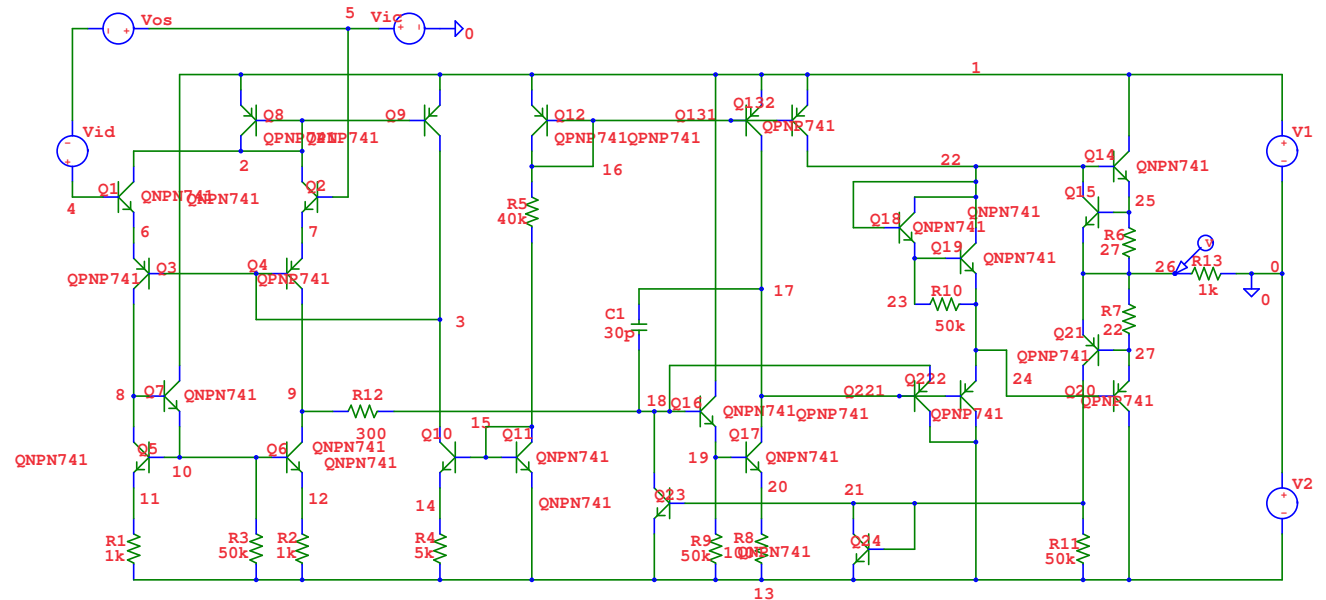
## AC-Analyse einer Klangregelschaltung

Bode-Diagramm für den  
Frequenzbereich  
10 Hz bis 10 kHz



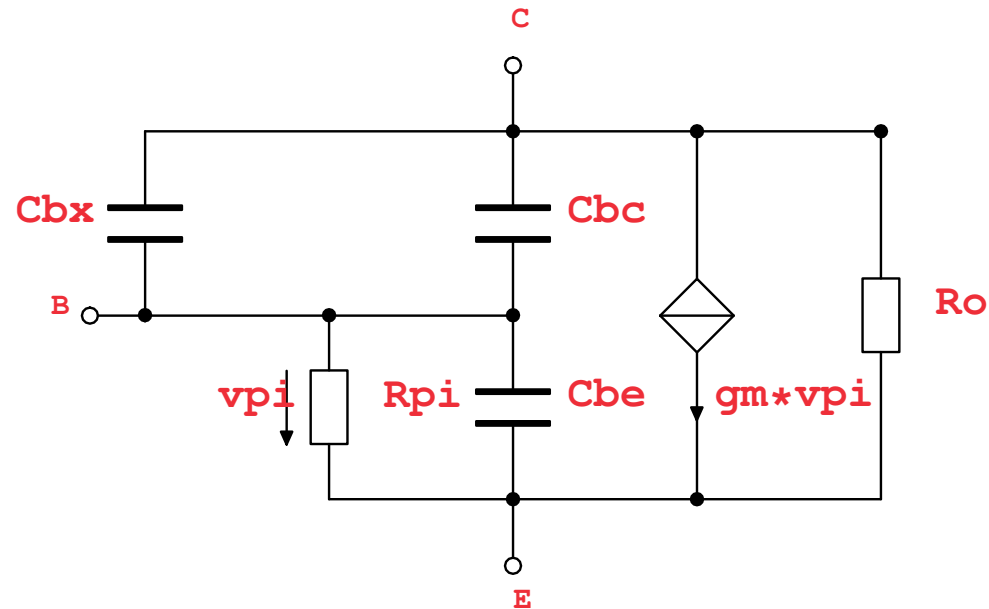
# AC-Analyse eines Operationsverstärkers

Eingrenzen der  
Ausgangsspannung  
für den Frequenzbereich  
0.1 Hz bis 1 MHz  
bei konstantem Arbeitspunkt



## AC-Analyse eines Operationsverstärkers

Lineares Modell  
für Bipolar-Transistor

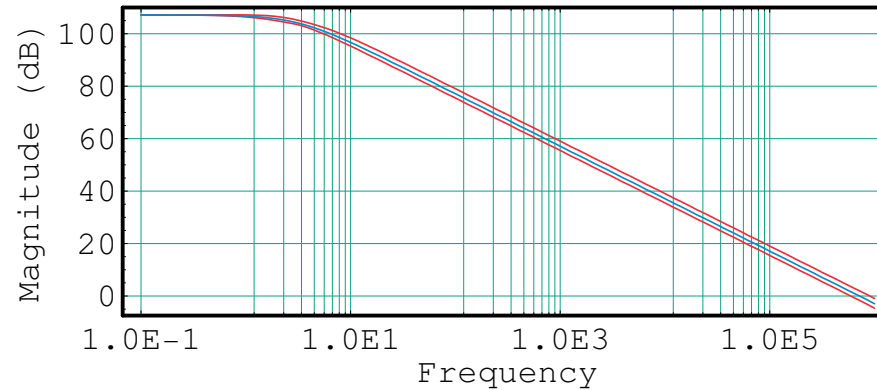


Toleranzspezifikation  
(Kondensatoren)  $\pm 20\%$

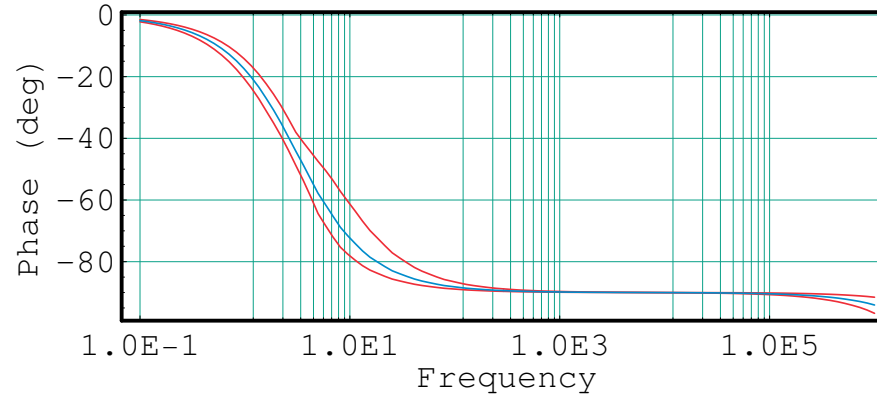
Anzahl der Transistoren: 26  
Insgesamt 79 Kondensatoren

## AC-Analyse eines Operationsverstärkers

Eingrenzen der  
Ausgangsspannung  
für den Frequenzbereich  
0.1 Hz bis 1 MHz  
bei konstantem Arbeitspunkt

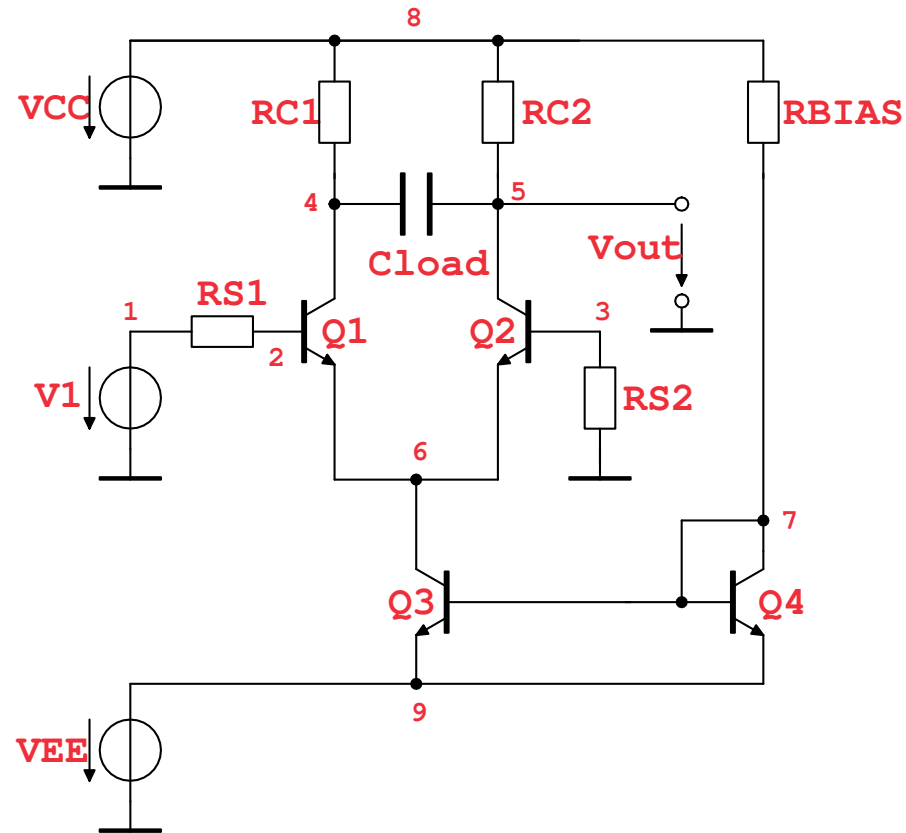


Toleranzspezifikation  
(Kondensatoren)  $\pm 20\%$



## DT-Analyse eines Differenzverstärkers

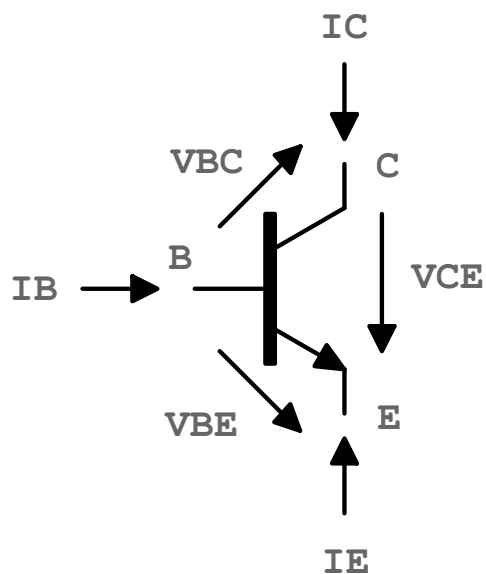
Schaltung



Toleranzspezifikation:  
Widerstände  $\pm 4\%$

## DT-Analyse eines Differenzverstärkers

Bipolar-Transistor-Modell



$$J_{BE} = \mathbf{IS}^{(1)} \cdot \left( e^{\frac{V_{BE}}{kT} q} - 1 \right)$$

$$J_{BC} = \mathbf{IS}^{(2)} \cdot \left( e^{\frac{V_{BC}}{kT} q} - 1 \right)$$

$$I_C = J_{BE} - \frac{1}{\alpha_r} J_{BC}$$

$$I_E = -\frac{1}{\alpha_f} J_{BE} + J_{BC}$$

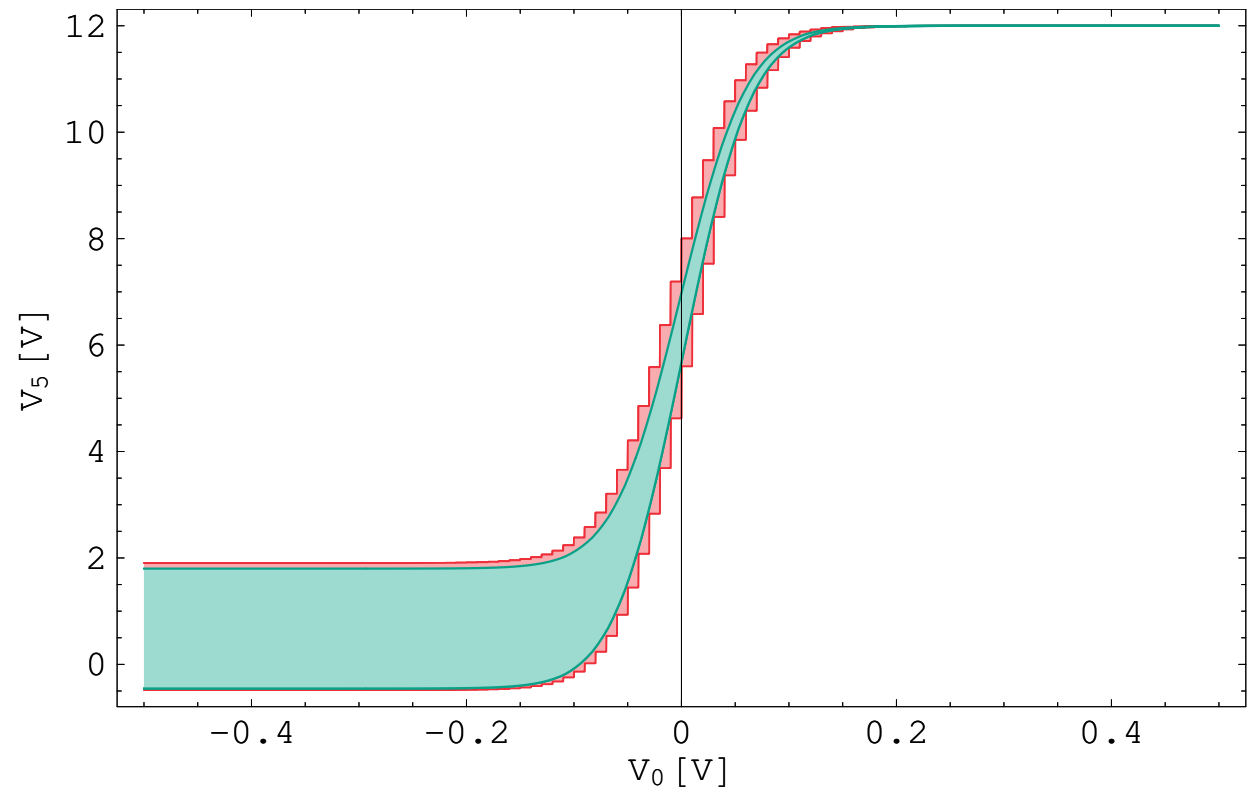
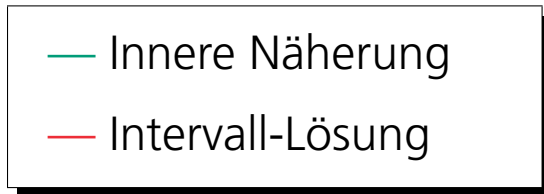
$\mathbf{IS}$  : Toleranzspezifikation  $\pm 1\%$

Temperatur (in Kelvin)  $T \approx 300 \text{ K}$

Boltzmann-Konstante  $k \approx 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ Ws/K}$

Elementarladung  $q \approx 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ A s}$

## DT-Analyse eines Differenzverstärkers



## Übersicht

1. Grundlagen
2. Symbolische Vorbetrachtungen
3. Intervall-Analyse analoger Schaltungen
4. Anwendungsbeispiele
- 5. Zusammenfassung**





## Zusammenfassung

### Intervall-Analyse analoger Schaltungen

- Äußere Abschätzungen
- Behandlung toleranzbehafteter Bauteile
- Anwendung von symbolischen Vorbetrachtungen
- Spezialisierte Intervall-Verfahren



## Zusammenfassung

### Lineare Schaltungsanalyse

- Entwicklung von Lösungsverfahren für große Bauteiletoleranzen
- Entwicklung von Methoden für toleranzbehaftete Schaltungen industrieller Größenordnung
- Erweiterung auf komplexwertige Systeme (Frequenzbereich)
- Erweiterung für verschiedene Gleichungsformulierungen (Sparse Tableau, Modifizierte Knotenanalyse)

### Nichtlineare Schaltungsanalyse

- Verbesserung des Intervall-Newton-Verfahrens
- Reformulierung von nichtlinearen Modellen



## Zusammenfassung

### Implementierung

- Simulation des Frequenzgangs und Arbeitspunktanalyse für Systeme mit intervallwertigen Parametern
- Effiziente Implementierung (Mathematica, C++)
- Add-on für kommerzielle Software Analog Insydes

### Modellierung

- Toleranzbehaftete Diode
- Erweiterung des Transistor-Modells von Ebers und Moll

